LECTIONES XVIII.

Cantabrigiæ in Scholis publicis habitæ;

in quibus

OPTICORUM PHÆNOMENON

GENUINÆ RATIONES

inveſtigantur, ac exponuntur.

Annexæ ſunt Lectiones aliquot Geometricæ.

Ἀρχὴ, καὶ τὸ μέρος ἥμισυ τοῦ παντός. Ariſt.

Ab ISAACO BARROW Socio Collegii S. Trinitatis, Matheſeos Profeſſore Lucaſiano, necnon Societatis Regiæ Sodale.

LONDINI,

Typis Gulielmi Godbid, & proſtant venales apud Gualterum Kettilby, ad Inſigne Capitis Epiſcopi in Cœmeterio D. Pauli. M. DC. LXXII.

Imprimatur,

Edmundo Boldero PROCANCELLARIO.
Pet. Gunning Præfect. Coll. S. *Joban.*
Jo. Pearson Mag. Coll. S. *Trin.*

Martii 22. 166$\frac{1}{9}$.

Epistola ad LECTOREM.

Benigne Lector,

Minimè tibi destinatum hoc quicquid est opellæ, statim ipse, modò digneris inspicere, multis ab indiciis deprehendes; nec tamen ut juris id tui fieret, defuerunt auctores, quibus tandem, animo certè trepidans atque renitens, idcircò præsertim obsequutus sum, quoniam in hoc, quod ipse primus obierim, munus, successuris exemplo præire rem literariam; si minùs effectu, saltem conatu promovendi, non inhonesta, nec ab officio meo aliena videbatur ambitio. accessit tenuis spes inesse bonæ frugis non-nihil, quod & aliquatenus tibi prosit, nec omnino displiceat. Memineris autem obtestor qui in his literis provectior es, quale scriptum attrectas; non utique tibi soli elaboratum; non sponte productum; non diuturnâ meditatione subactos exhibens feriantis ingenii conceptus; at Lectiones Scholasticas; primùm officii necessitate expressas; tum subinde properantiùs effusas, ut absolveretur pensum, ac hora desineret; demùm ad promiscui literarii populi institutionem comparatas, cujus intererat complura (qualia tibi videbuntur) leviora non prætermitti; ut frustrà futurus sis (id quod te monitum oportuit, nè multùm expectando tibi pariter obsis, ac mihi) accuratum hìc quicquam, affabrè positum, aut concinnè digestum sperans. Enimverò, quò tibi satisfacerem, expediret scio multa detruncare, meliora substituere, pleraque transponere, omnia ad incudem limamque revocare; quæ tamen adniti, nec stomachi mei, nec otii fuit; sed nec facultatis exequi. in puris itaque naturalibus (quod aiunt) & prout nata sunt emittere malui; quàm operosè lambendo aliam in formam, nec ipsam placituram refingere. quinimò postquam edendi propositum inii, seu fastidio correptus seu novandi subiturum studium fugitans, nè quidem horum magnam partem relegere sustinui; verùm, quod tenellæ matres facti-

facilitant, à me depulsum partum amicorum haud recusantium nutriciæ curæ commisi, prout ipsis visum esset, educandum aut exponendum. quorum unus (ipsos enim honestum duco nominatim agnoscere) D. Isaacus Newtonus, *collega noster (peregregiæ vir indolis ac insignis peritiæ) exemplar revisit, aliqua corrigenda monens, sed & de suo nonnulla pene suggerens, quæ nostris a'icubi cum laude innexa cernes. alter (quem nostræ gentis haud immeritò* Mersennum *dixero, cùm suâ tum aliorum operâ provehendis hisce literis natum) D.* Joh. Collinsius, *ingente suo cum labore editionem procuravit. Possem jam alios expectationi tuæ obices ponere, seu veniæ conciliatrices causas obtendere (meam ingenii tenuitatem, experimentorum inopiam, alias intercurrentes curas) nisi* Catonis *senioris mordaculum illud in me subvererer recasurum:* Rectè si Amphictyonum decreto constrictus hæc evulgas. *Hujusmodi saltem præloquium partim æquitas exegit, partim in fœtum proprium storgh quædam elicuit, ut excusatior is, ac à censura munitior prodiret. sin acrior sis, nec hæc aure dextrâ admittere velis, pro tuo (per me licet) ingenio facias, quantumvis strenuè reprehendas.*

Epistola;

SPECTATISSIMIS VIRIS

ROBERTO RAWORTH & THOMÆ BUCK

ARMIGERIS;

HAS, à VENERABILI VIRO *HENRICO LUCAS* inſtitutæ atque dotatæ, ab ipſis verò optimâ fide, ſummâque prudentiâ adminiſtratæ & conſtitutæ in ACADEMIA CANTABRIGIENSI, PROFESSIONIS MATHEMATICÆ primitias, gratitudinis ac obſervantiæ ergò, devovet

Iſaac Barrow.

SPECTATISSIMIS VIRIS

ROBERTO RAWORTH & THOMÆ BUCK

ARMIGERIS,

HENRICUS LUCAS, S. Venerabili Viro

[illegible] atque doctrinâ, ab
[illegible] verò optimâ fide, summâque prin-
[illegible] administrare & continuare in
ACADEMIA CANTABRIGIENSI,
[illegible] MATHEMATICÆ
[illegible] gratitudinis ac observantiæ
[illegible] devoveri.

Epiſtola; in qua Operis hujus Argumentum, & ſcopus brevitèr exponuntur.

PErcontaris (amice cum primis chariſſimè) quid in *Lectionibus* iſtis jam prælo ſubditis præſtiterim, aut præſtare voluerim. reſponſo facilè defungi poſſem, ea dicendo præſtita videri, quæ ſingularum initia pollicentur, è quibus inſequentium methodus, materiâ, ſcopus conſtare poterunt ipsâ delibanti. verùm in ſummam, opinor, iſta contrahi vis, & ſub unum aſpectum redigi. id quidem ægrè poſſum, niſi (quod juxtà faſtidioſum ac longum eſſet) complura *Theoremata* recitando; ſed utcunque morem tibi geram, rerum capita ſuccinctè perſtringens. Generatim eò connitor, ut illam, quam tractandam ſuſcipio, *Opticæ* partem aliquatenùs promoveam, ejus imprimis principia explicando; tum ab ipſis *Utilia Conſectaria* deducendo; demùm præcipuos (quos animadverteram) defectus ſupplendo, nec non *vulgatos errores* corrigendo. huc collimans, ſpeciatim primò receptas hypotheſes ad examen revoco, quatenus admittendæ ſunt & quomodò rectiùs intelligendæ edocere ſtudens; tum è phyſicis ueriſimilibus cauſis ipſas eliciens ac aſtruens. quâ in parte mihi fidei multum attribui nolim; quæ probabiliora mihi viſa protuli, neutiquam verò talia, quibus ipſe magnopere confidam. valeant quantum valere poſſunt. Saltem hypotheſes ipſas admitti peto, ceu experientiæ conſentaneas, nec à ratione quaquàm abhorrentes. Hypotheſibus conſtitutis, ab iis proximè generalia

quædam *Theoremata* derivo, partim ab aliis agnita (quæ methodi gratiâ, & propter aliorum probationem, meis demonſtrationibus firmata appono) partim à me obſervata. dein ad ſpecialia progredior, id mihi negotii ſumens, ut *Catoptricæ*, ac *Dioptricæ* utriuſque, in uſu maximè poſitæ (*planæ* ſcilicet & *Sphæricæ*) potiſſima pertractem. *In Catoptrica Sphærica* (ſiquidem plana jam olim verè ſatis, ac fusè exculta habetur) ejuſmodi *Theoremata* propono, de quibus reflexorum radiorum interſectiones atque limites innoteſcunt; unáque punctorum tam à longè, quàm è propinquo radiantium imagines, & apparentes loci determinantur; reſpectu oculi nedum in radiationis axe, ſed extra ipſum ubicunque conſtituti. quæ certè vel nuſquam (quod ſciam) aut magnâ ex parte perperàm alibi tractata proſtant; id quod, incidentèr aliorum refutans ſententias, cùm ratiociniis perſpicuis, tum experimentis decretoriis evictum eo. *Dioptricam* porrò tam *planam quàm Sphæricam*, refractionis noviſſimâ præſtratâ lege vel hypotheſi (quam *illuſtris Carteſius* detexit, at plerique, reor, meliores *Optici* jam amplexantur; quam & propter aſſignatas alicubi rationes veritati conſonam judico) velut à fundamentis extruo. nec enim eorum, qui principium illud admiſerunt, ipſum hactenus quiſquam (in ſcriptis intelligo quæ viderim luci commendatis) huc applicuit. Hîc autem imprimis puncta radiantia longè diſſita (ſeu quaſi parallelos emittentia radios) conſiderans, quo pacto ab ipſis profluentes radii detorquentur exquiro, *Theoremata* quædam eliciens, è quibus præcipua *refractorum ſymptomata* liquent, ipſorum interſectiones ac limites dignoſcuntur; apparentia denique punctorum objectorum loca deſignantur, tam oculi reſpectu qui in axe, quàm ejus qui uſpiam extra axem collocatur. tunc eadem attento quoad puncta ſenſibiliter vicina, ſeu divergentibus radiis allucentia. ſub extremum, quò paratior ſit horum uſus,

punctorum

punctorum per omnigenas lentes translucentium imagines singillatim exhibeo determinatas. Hisce qualitercunque confectis, de magnitudinum dijudicandis (istis nempe, quæ hujusmodi consequuntur inflectiones) apparentiis nonnulla generatim attingo; tum posteà specialiùs ac uberiùs planorum objectorum imagines quales sunt, & quomodò designandæ commonstro, ab indè receptui cano. Memoratis autem hisce passim alia παρεργα interspergo; de quibus tu videris, nam ego malim reticere.

Brevitatis gratiâ notæ quædam adhibentur, quarum hîc subjungitur interpretatio.

$A + B$. *hoc est*	A & B *simul acceptæ.*
$A - B$.	A, *demptâ* B.
$A - : B$.	*differentia ipsarum* A, & B.
$A \times B$.	A *multiplicata, vel ducta in* B.
$\frac{A}{B}$ —	A *divisa per* B, *vel applicata ad* B.
$A = B$.	A *æquatur ipsi* B.
$A \sqsubset B$.	A *major est quàm* B.
$A \sqsupset B$	A *minor est quam* B.
$A . B :: C . D$	A *ad* B *eandem rationem habet, quam* C *ad* D.
$A, B, C, D \div\!\div$.	A, B, C, D *sunt continuè proportionales.*
$A . B \sqsubset C . D$.	A *ad* B *majorem rationem habet, quàm* C *ad* D.
$A . B \sqsupset C . D$.	A *ad* B *minorem rationem habet, quàm* C *ad* D.
$A . B + C . D \begin{matrix} = \\ \sqsubset \\ \sqsupset \end{matrix}$	M.N. *Rationes* A ad B, & C ad D *compositæ* { *adæquant* / *excedunt* / *deficiunt à* } *ratione* M ad N.
Aq.	*Quadratum ex* A.
$\sqrt{A}$.	*Latus, vel radix quadrata ipsius* A.
Ac.	*Cubus ex* A.
$\sqrt{Aq + Bq}$.	*Latus compositi ex* A & Bq.

Reliquas, si quæ occurrunt, abbreviaturas Lector facili conjecturâ capiet, præsertim in analysi tantillùm versatus.

Lect.

Lect. I.

I. PRæfatorio jam vinculo ſolutus, & ſcopulum prætervectus Rhetoricum, ad muneris mei proprium opus accingor. Imprimis autem novi quod inierim conſilii rationem, paucis expediam. Cum prius inſtitutum urgens adverterim, occurrere pleraque nimiam attentionem deſiderantia, nec ex improviſo auſcultantibus, indè ſatis opportuna; incommodum etiam illud à puram Geometriam attrectantibus haud poſſe declinari; conſtitui, derelictâ tantiſper iſtâ, protinus in amæniores (floribus nempe Phyſicis depictos, & fructibus conſitos Mechanicis) mixtæ quam appellitant Matheſeos Campos deviare; Opticæ nimirum, Mechanicæ, Coſmographiæ, reliquæ cujuſcunque, prout occaſio feret, & commodum videbitur. Neque tamen animus erit ullius ex his longè diffuſa latifundia pervagari, vel extremos fines circumire; ſed ad ejus quaſi metropolim è veſtigio rectà procedere; primas tantum hypotheſes excutere, præcipuáque (quibus illa tam vaſta theorematum moles incumbit) fundamenta denudare; tum verò nonnulla, palmaria quidem illa, ſtatim emergentia corollaria ſubtexere. Quorum certè σκέψις jucunda præſertim, utilis, & fructuoſa videri poteſt; quum è principiis rectè poſitis, probéque perceptis reliquorum & firma fides, & facilis comprehenſio ſubnaſcantur.

Præceſſerat anteloquium occaſioni, quæ fuit, adaptatum.

II. Ab Optica ſumemus exordium; ſcientia cum primis Nobili; quam cùm peculiaris amænitas, tum ingens commendat utilitas. Nam Naturæ ſimul detegendis arcanis, ac explicandis Phænomenis minimè vos latet quantopere conducat; neque minùs ad Aſtronomicas rationes quàm planè neceſſaria ſit; ut Perſpectivam, Picturam, & his agnatas alias eximias Artes taceam; quæ totæ quantæ quantæ ſunt ab ea pendent, ac principia ſua mutuantur. Ut & præteream qualia, certè vix pretio

ſuo æſtimanda, ad vitæ communis uſum beneficia ſubminiſtret; viſûs imperfectionibus & vitiis tam prompta, quàm certa, minimi ſumptûs, & nullius periculi remedia conferendo. Neque, quum curioſiſſimus iſte ſenſus noſter ità varias indies, ità miras rerum ſpecies exhibeat nobis; non admodum oblectare nos, non eximiâ voluptate mentes noſtras afficere poſſit, unde talis emergat apparentiarum diverſitas, & quis ſit illas attingendi modus nedum accuratè, certóque cognoſcere, ſed utcunque veriſimiliter arbitrari; præſertim quum in nullâ parte noſtri, nec in tota fortaſſis rerum compage, neceſſitatibus, commodis, & voluptatibus noſtris proſpicientis melioris naturæ ſeu fines agendi, ſeu modos pleniùs queamus perſpicere; nuſquam adeò diſtinctiùs aut apertiùs opificis παντόϛ eluceat artificium. Verùm elogia pertexere non vacat, aut convenit nobis. Rem potiùs ipſam aggrediamur.

III. Quæ circa viſum occupatur diſciplina communiter in tria membra diſpertitur; primum, quod viſus directis radiis objecta cernentis affectiones conſiderat (hoc ſpeciatim Optice nominatur;) alterum, quod è radiorum ab opacis corporibus repercuſſu oriundas ſpeculatur apparentias (cui Catoptricæ nomen inditum;) tertium denique, quod ideò Dioptrica vocitatur, quia cauſas inveſtigat, aut exponit eorum quæ à radiis apparent per diverſa media tranſlucentibus, & eorum occurſu demutatis. Quam diſtributionem ut non improbamus, ità nobis haud obſervandam proponimus; nedum quia multa pariter his communia ſunt, at præcipuè quia viſio quævis, ut libet ſimplex ac directa, ſicuti reverà non abſque nonnulla radiorum inflectione peragitur, ità nec eâ ſeclusâ penitus intelligi poteſt aut explicari. Igitur hujuſmodi methodo potius inſiſtendum cenſemus; ut nempe primò viſionis cauſas (quæ ſcilicet illam extrinſecus efficiunt, aut afficiunt) examinemus; tum ut videndi modum (hoc eſt quo pacto ſenſus hic noſter idoneis organis inſtructus iſtis concurrentibus cauſis, objectorum illas, quas experimur, differentias apprehendit) adnitamur exponere; dehinc, ut Phænomena quædam ſelectiora ſuſcipiamus elucidanda; poſtremóque forſan, ut de viſûs remediis ac ſubſidiis aliquid ſubjungamus.

IV. Viſionis cauſas externas quod attinet, nemini jam dubium eſt, exiſtimo, non ullâ (quanquam *Empedocli*, *Platoni*, *Euclidi*, veteribus aliis id placitum erat) ab oculo radiorum emiſſione, verùm ab objectis defluente re quâpiam, oculoſque percellente viſum effici; quod & *Democrito*

Democrito jam olim, ejúſque ſequaci (dicam an ſimio?) ſuboluerat *Epicuro*. Quod ſanè malim adſumere, vel ſupponere, quàm poſt tot alios operoſo niſu comprobare. Certè (quo breviſſimè tangam hanc quæſtionem) ſic in alia qualibet evenit ſenſione, (quidni pariter in viſu?) non ut ſenſus in objecta feratur, ſed ut ipſa ſe ſenſibus imprimant; immediato nempe contactu, vel medii cujuſdam ſeu projecti, ſeu commoti interventu. Tum ratio vetat, ut ex ocello quicquam in immenſam adeò circumquaque diſtantiam credamus emanare; neque quod ſic emanet in eo quidpiam aptum natum deprehendimus. Totus enimverò pellucidis humoribus aut membranulis conſtat opacis, ad tranſmittendam lucem, vel ad eam excipiendam, aptiſſimè, ſed ad progignendam à ſe vel ejaculandam haudquaquam comparatis. Quòd ſi lucem ipſe profunderet, inſitiſque radiis attingeret objecta, quidni denſiſſimis in tenebris hoc præſertim faceret, & feles vel (Hiſtoricis ſi placet) *Tiberii* fieremus omnes? Quæ, dico, lucis externæ tam indiſpenſabilis ad viſum neceſſitas eſſet? συναυγίαι equidem Platonicæ. Sonum audio, vim non capio. Demum ab objectis, etiam à tergo ſitis, circumfuſas ſpecies quas vocant, ad oculos deportari, ſuíque perceptionem efficere, cùm à ſpeculis, tum ab aliis innumeris perquam obviis experimentis compertum habetur; illarum igitur efficaciæ quidni commodiſſimè viſionem adſcribamus? ſatis hæc illam quam adſumimus vulgarem jam hypotheſin adſtruunt, quam & totus dicendorum tenor luculentè confirmabit.

V. Cùm verò multa viſum afficiant diverſimode, puta lux, lumen, dies, crepuſculum, colores, rerum imagines, phaſmata; nec tamen abſque luce. (Præſente nimirum aut prævia) quidvis horum aliquid peragat, perſpicuum eſt lucis hìc præcipuas partes, primariam efficaciam fore. Quinimo rem ſedulò penſitantes, eò deveniemus, opinor, ut varias his omnibus adnexas apparentias non aliunde quàm ex diverſimodâ lucis unius operatione putemus proficiſci. Cùm nempe lux ſit illud quicquid ſit quod à corpore lucido (quale ſtella, ignis, flamma) proveniens immediatè viſum afficit, lumen nil videtur aliud quàm lux in corpuſcula quædam opaca (ſeu lucem non penitus excipientia) τὰ ἀνείχοντα interſperſa impingens, nec non ab iis in omnes undique partes reſiliens; quæ ſcilicet in oculum itineri ſuo expoſitum tumultuariè delapſa confuſam quandam apparentiam excitat; quàm, ſi fortior ſit, eique prorogandæ lucens præſtò ſit, appellamus diem; at ſi debilior fuerit, ejúſque fons abſceſſerit, crepuſculum dicimus. Etiam color nil fermè videtur aliud, quàm lux à corporibus quibus occurrit

majuſculis, & aliquatenus ſtabilem ſuarum partium ſitum retinentibus (pro varia particularum, è quibus illa componuntur, figura, diſpoſitione, textura, hoc vel illo modo) detorta, vel utcunque repercuſſa; nimirum ut ejuſmodi corporibus illapſa lux vel motu ſuo, vel agendi virtute, vel ipſâ quantitate ſuâ (quoad raritatem intelligo, vel denſitatem; radiorum copiam, aut paucitatem) talis evadat, & pro modi diſcrimine diſpares procreet apparentias, à quibus eam variis colorum nominibus inſignimus. Imagines autem nil planè ſunt aliud, quum lux ab objectis ita reflexa, vel refracta, ut rurſus in unum locum, talémque recolligatur ſitum, qualem tunc obtinuit, quum ab originali proflueret objecto; directóque verſus oculum itinere procederet; quo fit ut ſimiliter objecta, ſed tanquam alibi collocata repræſentent. Phaſmata denique ſunt imaginum quaſi colores, pro lucis diverſa media trajicientis alia ac alia quoad motum, vim, quantitatem affectione diverſa variati. Craſſiuſculè jam iſta proponimus; quorum forſan aliqua ſaltem in dicendorum progreſſu magis eluceſcent.

VI. Cùm itaque lux in viſione peragenda, diverſiſque procreandis apparentiis ita quaſi paginam utramque faciat; Et reverà præter illam nil aliud ſenſum ingredi, vel commovere videatur; de illa primò diſpiciendum venit. Et ejuſce quidem de natura à Phyſicis magnoperè diſceptatur; an puta ſit corporea quædam ſubſtantia, an qualitas; an actio tantum, aut motus quidam; de productione quoque conſequentèr ejuſdem, & propagatione diſquiritur, utrùm continuo per medium tranſitu, vel medii duntaxat impulſu, vel ſuâ ipſius multiplicatione quâdam huc propagetur; quales ego quæſtiones curioſè non eventilabo. Quod iſtarum ſaltem ſententiam attinet, quæ lucem accidentium claſſi accenſet; quando veris corporeis effectibus (quales ſunt rectâ progredi, repercuti, refringi, calorem excitare, ſenſum afficere) veræ ſubliſtentes cauſæ, veri locales motus aſſignari debeant; neque quomodò meræ qualitati, vel accidenti cuipiam iſta competant intelligere mihi datum ſit; quinetiam quo ſeſe pacto multiplicare valeat, id genus entium, quâ ratione vim ullam exerere, cùm è cordatioribus & rerum intima perſcrutantibus Philoſophis haud pauci ſe parùm capere profiteantur; eam haud dubitem hìc miſſam facere. Verùm an corporeæ quædam ἀπορροιαι, de lucidi corporis viſceribus emanantes, totúmque nobis & ipſi interjectum ſpatium quàm perniciſſimè tranſcurrentes lucem conſtituant; vel an illa potius nihil ſit aliud quàm ipſius lucentis actio, contigua ſibi corpora prementis ac impellentis, iiſque mediantibus alia, quæ adjacent; tum & horum interceſſu rurſus alia proximè ſuccedentia;

cedentia; nec non ità perpetuâ deinceps ad nos deductâ ſerie, vix auſim certè mihi dijudicandum accipere; adeò paribus utraque pars argumentis niti videtur, æquis utraque difficultatibus urgeri. Quin eò fere propendeo, ut cenſeam utroque ſubinde modo lucem procreari, tam per effluvia corporea, quàm per continuum impulſum; ſatiúſque fore nonnullos ejus effectus huic, alios illi tribuere. Sanè cùm ad quantum intervallum undiquaque protenſum exiguæ lampadis flammula ſe vividè conſpiciendam præbeat, adeò quidem ut integrum ejus radiatione circumpoſitum medium perfundi complerique videatur, animadverto; quomodo tantillum corpus tali tamdiu ſuppeditandæ profluviorum copiæ par ſit; quomodo dum ea profundit non ipſum pluſquam exhauriatur, & conteſtim evaneſcat, haud facile capio. Cùm verò rurſus lucis inflectiones, illáſque qui conſequuntur effectus cogito, vix animo meo nudus impulſus facit ſatis. Itaque mentis anxius hæreo. Veruntamen quia de natura lucis aliquid præſternam expedit, iis quas mox tradam hypotheſibus nonnihil explicandis congruum; hoc ſe modo, vel non abſimili rem habere concipio.

VII. Pono corpus omne lucidum, ut tale, congeriem eſſe quandam corpuſculorum ultrà pene quàm cogitari poteſt minutorum & exilium; horum autem unumquódque vehementiſſimo motu percitum, aliquò (ſecundum legem iſtam naturæ ſatis receptam & exploratam) rectà tendere; tum medium circumſtare, fluidum quoque (cujus nempe partes nullo colligatæ nexu quaquaverſum liberè feruntur) è corporibus aggregatum, exiliſſimis quidem & illis, at priorum reſpectu bene craſſis & ſolidis; ità tamen ut hoc meatus habeat, & interſtitia tenuioribus illis admittendis opportuna; quin & horum craſſiorum corpuſculorum occurſu progreſſum impediri multorum ex illis, quæ in lucidi ſuperficie verſantur, aut ab ea ruunt corpuſculis; ut neceſſe ſit iis ſic inhibitis, atque repulſis introrſum ſe recipere, quo fit ut dicta congeries (aliis etiam in eam aliunde confluentibus ejuſdem naturæ corpuſculis) aliquatenus intra ſuos cancellos reſtringatur, nec toto ſtatim in auras expanſa diſſipetur. Interim verò complura per dictos canales repertâ viâ curſum ſuum rectà continuare, materiam inibi deprehenſam haud ità fortiter obſiſtentem in fugam agentia, & ante ſe protrudentia; quorum veſtigiis alia de lucido corpore ſimiliter prodeuntia prorſus inſiſtent, longúmque ſimul omnia lucis rivulum efficient, indeflexâ ſerie procurrentem. Quin & iſtorum fortè nonnulla memoratas medii craſſiores particulas impetu ferire tam prævalido, nonnunquam ut ipſas quoque cedere cogant, & ſecum conſpirantes in directum adjacentia

centia, corpora propellere; quæ & pari modo proximè succedentibus vim inferent, & ità continuò, sic ut simul & semel indefinitè protensa talium corpusculorum series promoveatur, & antrorsum connitatur; qualis utrolibet modo producta lucis propago radius consuevit appellari. Ità quidem rem existimo simpliciter obtingere, donec medium permanet homogeneum, hoc est ejusdem fermè magnitudinis, soliditatis, ac figuræ partibus constans, & similibus interstitiis pervium; at si medium occurrat aliter affectum, è diversis quippe secundum quantitatem aut figuram particulis compactum, porisque laxioribus, aut strictioribus pertusum, cujúsque proinde materia vel promptiùs cedat, aut contumaciùs obluctetur, oportebit illius seu cursûs, seu impulsûs vim, effectúmque demutari; quin & si novi medii superficies ita transeunti lucis amni se obliquam objiciat, ejus quoque directionem infringi; vel ἀνάκλασιν contingere, quam *Aristoteles* vocat, eo nomine (quas nunc distinguere solemus) reflectionem simul ac refractionem complectens. Enimverò materiæ impingens ità compactæ, ut venienti transitum perneget, aut prementis impetum inconcussa sustineat, aliò tota quò facillimè poterit & directissimè, regredietur & resiliet; aliò vim suam quàm retinet omnem derivabit; id quod lucis reflectio dicitur (Hujusmodi verò corpus lucem non suscipiens eatenus opacum, (Hoc est terrenum, ut Grammatici volunt, ab Ope vocabulo prisco tellurem designante) appellatur; quatenus autem sibimet incurrentem aliò projicit, illustratum dici; quatenus objecti speciem redhibet aspicienti, speculum.) Quòd si verò materia luci progredienti sic obviàm facta transitum utcunque præbeat, ejusve conatum excipiat, lentiùs tamen aut paratiùs præ illa, per quam priùs decurrebat, tum virtutis suæ quantitate aliquantùm hinc variatâ simul à recto quod affectabat itinere deflectetur; eo nimirum ordine modóque quem posthac conabimur elicere. Qualis effectus refractionis nomine venire solet (subnotetur autem, hoc modo lucem intromittens medium eatenus perspicuum, diaphanum, transparens, pellucidum appellari.) Ità lucis naturam, originem, propagationem, ac progressum ὁλοσχερῶς (omissis quæ adjungi possent plerisque minùs ad nostrum propositum spectantibus) expono; nec aliud ferè præter hæc requiro declarandis hypothesibus, quos communiter adsumunt Optici; quæque necessariò debent huic extruendæ Scientiæ præsterni. Comprobandis autem iis, quæ dixi non incumbam; cùm & (quod instituto nostro satis est) talia dari posse non minùs ipsâ luce clarum videatur, imò reverà dari complura declarent experimenta. Opticas verò quas innui hypotheses præcipuas subjungemus, & nonnihil attentabimus explicare.

VIII.

VIII. 1. Radii lucis (hoc eſt lucidi tranſitûs aut impulſus quales deſcripſimus tramites) in eodem exiſtentes ſimilari medio directi ſunt. Hoc è dictis abunde patet. Quin indè Corollarii vice deducitur radios quoad rem ipſam, Phyſicéque loquendo figurâ priſmaticos eſſe, vel cylindricos. Nempe corpuſculum illud quodpiam in lucidi ſuperficie poſitum, à quò radius originem ſuam ducit, dum à primò ſuo loco ceu baſe defertur aut totâ ſuâ ſuperficie contiguum ſibi corpus rectà propellit, figuræ ſuæ (vel impulſi ſaltem corporis figuræ) congruum deſignat, ſuper hac vel illa baſe conſtitutum, ſolidum longum, exile, teres, quale cylindrus, aut priſma. Proinde quando Mathematicè rem tractamus, iſtos radios pro rectis lineis habere poſſumus; tum quia revera ſunt adeò tenues & recti, tum quia plerumque pro cylindricis ejuſmodi ſeu priſmaticis figuris ipſarum axes ità ſumi poſſunt, ut nihil indè ratiocinio Mathematico derogetur.

IX. 2. Ab omni corporis lucidi (vel illuſtrati) puncto ad quodvis medii (non obſtaculis interciſi) punctum lucis aliquis radius dirigitur. Hæc apud Opticos tritiſſima ſuppoſitio quò vel intelligi vel admitti poſſit, omninò duplicem limitationem exigere videtur, è ſupra dictis utramque deducibilem. Unam, ut omnis puncti nomine nedum non præciſè punctum quodcunque Mathematicum, ac nec omnem particulam concipiamus realem & Phyſicam; verùm ſaltem admodum exiguam, qualique ferme minorem vel animo deſignare nequeamus, alteram ut non in unoquoque ſtrictè dicto temporis inſtanti, nec in omni reali temporis portiuncula cogitemus hoc contingere, ſed ut nullum temporis intervallum ſentiri poſſit ità curtum, aut momentaneum, quin intra ipſum à quavis lucidi deſignabili parte deſignatam ad medii partem radius aliquis exporrigatur. Enimverò cùm radiorum iſtæ quas aſſignavimus radices, lucidum componentia corpuſcula, ſint illorum, quorum nos utcunque quantitates ſenſu vel animo pertingere valemus, corporum reſpectu tanquam infinitè parva, nec non infinità quaſi pernicitate donata, non difficilè concipi poteſt in omni deſignabili, vel imaginabili lucentis ſpatiolo prorſus innumerabilem eorum multitudinem exiſtere, quorum fere ſingula diverſas in plagas tendunt; ut nulla ſit deſignabilis plaga, quam non una quæpiam appetat, aliquam ſaltem, utlibèt imperceptibilis & anguſti, temporis moram interponendo. In eo ſiquidem tempuſculo lucidi partes ſingulas innumera ſucceſſivè talia corpuſcula ſubingrediuntur juxta deſeruntque, de quibus mirum fuerit ni quoddam unum ad deſignatum medii ſpatium tendat, ſibi tranſmittendo meatuum aliquem (quos & pari ratione tanquam

quam infinitos ſupponere fas eſt) idoneum reperiens: Ità vulgare pronunciatum interpretor; id quod alias rigidè ſumptum haud verum duco. Nec enim idem corpus eodem temporis puncto diverſas in partes contendere, vel adniti; ſed nec eandem præciſe medii partem è diverſis locis accedentes corporum motus excipere quiſquam conceperit, opinor, aut ego conceſſerim; non certè magis quam idem corpus unà plures locos occupare, vel eundem locum plura ſimul corpora ſuſcipere; ad iſtum modum intellecta dicta ſuppoſitio totam unà cum radiis lucidis naturam, omnem, ut mihi videtur, Phyſicam permiſcebit. In noſtro rem explicandi modo nihil durius obverſari video, quàm ut hinc divinæ potentiæ, ſapientiæque vis magis eluceſcat, in luce ſic efformanda, tam ejus effectricibus particulis admirabilem exilitatem, incomprehenſibilemque velocitatem impertiendo, quæ prorſus ei neceſſariæ fuerunt, ut ſenſionem efficeret, & reliqua tam utilia ei deſtinata munia obiret. Sanè lucis corpuſculum unum ab arenula quavis litorea pluſquam eâ fortaſſis proportione ſuperatur, quâ tota quanta quanta eſt mundana moles arenulam iſtam excedit; id quod non ità cenſebit abſonum, quiſquis ad complures ſatis obvias apparentias mentem adverterit.

Subnotandum eſt porrò duas has fundamentales hypotheſes, ſic acceptas, innumeris admodum familiaribus experimentis confirmari. Quovis enim in loco ubicunque collocati objecti lucentis vel illuſtrati quæcunque deſignabilis particula conſpicitur oculo, repræſentatur in ſpeculo, modò nihil objiciatur ab eo rectâ delabentes radios intercludens; eadem verò ſtatim oculo ſubducitur, & penitus obumbratur, ſi quid opaci corporis directum intercipiens radiorum iter obtendatur. Etiam foramen utcunque tantillum ſufficit trajiciendis radiis quibus tota quantivis objecti facies obverſa depingatur. Et porrò quam nulla poſſit apprehendi tam exigua lucidi pars, à qua non lux ad oculum defluit, perſpiciliorum uſus apertiſſimè monſtrat. At pergo.

X. 3. Lucis radius quilibet alteri medio perpendiculariter incurrens, aut rectà progreditur, ſiquidem cedente medio procedere valet, aut in partes directè contrarias (hoc eſt in ſe, vel in ſuam retro ſemitam) repellitur. Experientiâ firmatur hæc hypotheſis; & rationi quoque conſentanea eſt; nec enim ulla poteſt excogitari cauſa, cur in unas potius quàm in alias partes deflectatur; igitur in nullas. Quinimò ſi verum ſit omne patiens, aut percuſſum vim inferenti poſitivâ quâdam vi repugnare, perſpicuum videtur eò reſiſtentiam dirigi, unde vis ingruebat; ejúſque conſequenter effectum abſolutè loquendo, tantùm illic deprehendi.

deprehendi. Quod sanè mihi tam verum apparet, ut non dubitem hanc ipsam hypothesin ad omnimodos incursus extendere, seu generatim effari, quod pulsus omnis & motus, utcunque medio cuilibet impingens, directè (per se nimirum, propriè, distinctéque rem estimando) continuatur, aut prorsum aut retrorsum. Scilicet, exempli causâ, si duo baculi A B Y Z, C D Y Z in idem medium E F (illud perpendiculariter, hoc obliquè) uniformi quâdam pressione vel impetu adigantur, existimo medii cessione vel resistentiâ totam (quâ baculus obliquus fertur, aut medium impellit) vim æquè rectâ semitâ antrorsum versus I K, vel retrò versus C D derivari, ac perpendicularis ipsius impetus in G H progreditur, aut regreditur in A B. Quod enim nonnulli putant medii superficiem baculi perpendicularis tendentiæ magis opponi, quam obliqui, proindéque perpendicularis impulsum rectà continuari, sed obliquum alio detorqueri; vel assertionem ipsam non agnosco, vel non admitto consequentiam. Enimverò si per illud opponi nil aliud volunt quàm realiter objici, seu obstare rectà pergenti, non minùs eo modo superficies E F opponitur baculo C D, quàm ipsi A B; rectum enim ejus progressum pariter intercipit, impedit, demutat. Verùm si quam aliam nescio quam imaginariam oppositionem intelligunt, nihil video quod huc faciat indè consectari. Profectò rem abstractè, nec ut accidentarium quid immisceamus, expendendo, nihil attinet ullam medii partem considerare præter illam, ad quam corpus progrediens aut propellens ei occurrit; hæc enim sola resistendo quicquam efficit, aut cedendo. Quare per rectam D Z progredienti impulsui solum punctum Z opponitur; perindéque fuerit qualem reliqua medii superficies obtinere situm concipiatur. Punctum autem Z æquè pulsui venienti à D per rectam D Z, atque tendenti per rectam Z K versus K contrariatur, ac ei qui à B per B Z procedens iter affectat per Z H versus H. Idémque de reliquis medii punctis intelligi par est, quibus uterque baculus ipsum contingit, aut ei applicatur. Itaque reverà par utriusque pulsûs quoad oppositionem est ratio; similisque proinde utrobique resultabit effectus; pulsum nempe recto tramite vel transmittere, vel rejicere. Verùm longè secus eveniet, si baculum alterum obliquum, seu P D Y Q, cum ipso A B Y Z conferamus. Etenim superficies E F baculi A B Y Z motui, vel impulsui magis opponitur, aut obsistit, quàm motui vel impulsui baculi P D Y Q. Quoniam illi toti cum tota sui parte Y Z, huic verò tantum ex parte Y renititur; è qua discrepantia necessariò dispar effectus consequetur, ut nimirum pulsûs aut motûs directio mutetur. Quod discrimen eò lubentius adnoto, quoniam hoc arbitror modo (vel adsimili) lucis ra- Fig. 1.

dios diverso medio obliquè incidentes, velut experimur, inflecti; saltem eo spectantia lucis præcipua symptomata, tribus porrò subjiciendis hypothesibus comprehensa, vix aliâ ratione commodius explicari.

XI. 4. Omnis radii lucidi inflectio (hoc subinde generali nomine, compendii causâ, tam refractionem, quam reflectionem complector) fit in superficie ad medii inflectentis superficiem perpendiculari, seu recta. Hujusce suppositionis haud ullam facilè satis commodam & claram rationem reperias apud Opticos, petitione principii, vel incomprehensibili quâdam obscuritate laborat quicquid fermè eo spectans afferunt; neque valdè miror radium lucis semper ut rectam concipientibus individuam lineam id eis accidisse; quo posito vix probam ullam ejusce rei causam assignari posse credo. Cadat enim radius linearis A B in speculi (instantiæ gratiâ) plani superficiem ad punctum B; per quod utcunque ducantur duæ rectæ C D, E F; cùm igitur rectæ A B, C D sint in uno quodam plano, quidni reflectio radii peragatur in isto plano? Simili ratione quoniam rectæ A B, E F sunt in uno plano, quidni radius in hoc etiam reflectionem patiatur? eodémque planè modo quid obstat quo minùs in singulis omnibus, hoc est infinitis planis, speculi superficiem secantibus, & per rectam A B ceu communem sectionem traductis perficiatur reflectio, idémque proinde radius unus in partes undique cunctas reflexus dispergatur? cur hoc fieri non possit, utique non capio. Quod respondetur enim, posito plano A B C ad speculi superficiem recto magis illud planum, quam cætera quævis speculi superficiei contrarium esse, proindè resistentiam in eo maximam contingere, propterèaque radium in eo potissimùm inflecti, parùm satisfacit; quoniam, ut superiùs insinuatum, extra punctum ipsum B, cui radius impingit, alia nulla specularis superficiei pars merito venit consideranda quid enim (ut hoc adjiciam prædictis) an in universam quà longè latéque distenditur, ipsius speculi superficiem agit hic linearis radius, & ab ea vicissim patitur; an in ejus definitam aliquam partem agit, patitúrque ab hac? quis in totam agere, vel à tota pati concedet? Et cur id uni parti deputandum præ aliis? ubi terminus figetur? quousque procedet operatio? quinimò potiùs, quia radii per rectam A B procurrentis impulsui tantùm id speculi quod est in recta A B versus G protracta resistit, ideò pulsus in ipsam A B rejicietur; Et nulla succurrit causa fontica, propter quam aliorsum deflectat; nihil datur, quod ejus tendentiam aliò determinet. Igitur ut aliis, quæ puto variæ assignantur, hujus effecti causis excutiendis abstineam, indè genuinam ejusce rationem (ut & generatim omnium

Fig. 2.

quæ

quæ circa radiorum inflectionem primùs obveniunt) existimo petendam, quod lucis radius non mera sit linea, verùm dimensionibus omnimodis præditum corpus; utpotè (juxta quæ prænotavimus) cylindricum aut prismaticum, pro figura corpusculi, à quo oritur. Supponatur, aliquatenus illustrandi propositi ergò, Parallelepipedum ABCDEFGH lucis radium obliquè speculo incurrentem repræsentare; cujus latus BF applicetur speculo, dum interea reliquum ejus supra speculi planum elevatur. Impedietur ergò Parallelogrammum ABFE, nè recta procedat, indè continget rectum BF aliquò supra dictum planum resilire. Verùm in allas saltem partes fiet hæc reflectio, secundum quas rectus radii progressus, quoad ejus fieri potest, quàm minimè pervertetur. Cùm enim is rectissimum cursum affectet, eum (ex indole certa, perpetuáque lege naturæ) si perfectè nequit, at tamen ut proximè consequetur. Itaque cùm inter plana latera ABDC, EFHG sibimet opposita cursus ejus anteà dirigeretur, & objecta superficies nihil jam obstet, quo minus inter eadem plana, tametsi sursum excussus, progrediatur, admodum liquet etiamnum inter illa semitam ejus contineri; locumque, seu plagam reflexionis eatenus haud perperam determinari. Cæterum est planum ABDC, eique oppositum EFGH speculi plano rectum; quia Parallelepipedum rectum ponitur, & ideo lateralis recta BF in speculi plano existens, planis ABDC, EFHG recta. Quocircà si totum hoc Paralleledipedum ob exilitatem suam, aut Mathematicæ computationis gratiâ, pro recta quasi linea censeatur, erit pariter & reflexus radius etiam linea recta; nec non uterque continebitur in superficie ad speculi planum recta. Non dissimili ratiocinio, si radius cylindri recti figura prædita admittatur (qualis nimirum à corpore procurrente, vel impulso producetur, id si Sphæricum fuerit) etiam radius in superficie plano speculi recta reflectionem ostendetur subire. Speculi quippe plano rectus incidat cylindrus ABDC; cujus bases AMCN, BODP, axis XZ; ita scilicet, ut basis BODP speculi planum contingat in B; reliquum ejus corpus (prout in figura depictum exhibetur) obliquè surgens supra planum emineat. Basis autem diametri BD, PO sese normaliter secent; ac per ipsam PO, & axem ductum planum efficiat in cylindro Parallelogrammum POMN. Si jam per hujusce latera MO, NP ducta concipiantur duo plana axi parallela, cylindrúmque contingentia, liquebit (ex antedictis causis pariter applicatis) totius cylindri ductum inter hæc duo plana comprehendi, radiique reflectionem inter ipsa definiri. Sunt autem hæc plana speculi plano recta. Sit enim recta GBH communis sectio circuli BODP, planique

Fig. 3.

Fig. 4.

ſpecularis; hæc utique circulum continget; (quia ſpeculi planum, ex hypotheſi, non alibi præterquam ad B circulo occurrit; adeóque nec recta GH) quare rectæ GH, OP ſunt parallelæ. Ergo PO eſt ad ſpeculi planum parallela. Huic verò perpendicularia ſunt plana prædicta cylindrum contingentia per MO, NP ducta, axi parallela. Quapropter eadem ſpeculi plano recta erunt. Hinc, ut antea, ſi totus radius habeatur inſtar rectæ lineæ, continget ejus reflectio velut in ſuperficie ad ſpeculum planum recta; quippe cùm ejus latitudo tota comprehendatur inter ejuſmodi duo plana; quæ proinde ſi nulla ſupponatur, in unum illa coaleſcent. Accommodari poſſent hæc cuicunque radii figuræ tali, qualem ſupra deſcripſimus, utcunque nonnulla demutando; ſed & eadem pari ratione radiorum refractionibus adaptentur. At pluribus parco.

LECT. II.

I. VIæ, quam nuper aperuimus, & aliquatenus ingreſſi ſumus, inhærentes eò jam devenimus, ut nobis incumbat proximè celebres illas hypotheſes (an Theoremata malitis appellare) radiorum inflexorum itineri penitus determinando (imaginúmque proinde locis, figuris, quantitatibus inveſtigandis, nec non apparentiarum quarumcunque cauſis explicandis) neceſſarias, experientiæ quidem bene conſonas illas, etiam aliquo rationis ſuffragio communire; præſtratis utique fundamentis, ac ſuppoſitionibus inſiſtendo. Cùm itaque lucis radio corpus adſignatum ſit figurâ priſmaticum, aut cylindricum; Et hoc quidem rectum (utpote præ reliquis ſimplex, & naturæ totas ſuas in agendo vires exerenti præſertim conveniens;) cùm & exinde progreſſus ejus eatenus fuerit definitus, ut intra ſuperficies duas planas inflectenti medio perpendiculares includatur; quas quidem abhinc (quando nullus tranſverſæ dimenſionis illius, vel intervalli ſuperficies iſtas dirimentis ad rem noſtram, illam ſaltem quam nunc attingimus ſpectans effectus, aut uſus ſit) brevitatis & perſpicuitatis cauſâ, velut unam habere poſſumus; adeóque jam radium ut duabus ſolummodò dimenſionibus præditum, & ad inſtar Parallelogrammi cujuſdam rectanguli, in plano ad medii inflectentis ſuperficiem recto jacentis, conſiderantes, reliquam itineris quod perſequitur determinationem, ultimam

mam illam & completam, inveſtigabimus, ac exponemus; cujuſce quidem circa reflectionem inquiſitionis conſectaria reſultabit hæc propoſitio, paſſim ab Opticis recepta:

II. 5. *Radius incidens, & reflexus ad ſpeculi, vel opaci reflectentis ſuperficiem angulos conſtituunt æquales.* Hujus effati declarationem ſic exequimur. Parallelogramum rectangulum A B C D lucis repræſentet radium obliquè plano ſpeculo E F incidentem. (Recta ſcilicet E F ſit communis ſectio plani ad ſpeculum rectanguli, in quo dictum Parallelogrammum exiſtit, & in quo, ſecundum præmiſſa, reflectio peragitur, cum plano ſpeculi.) Cùm itaque Parallelogrammi punctum B ſpeculo primum impingens opaco ac impervio, rectà progredi nequeat, conetur oportet (ut præſtruximus) retrò verſus A per ipſam rectam B A reſilire. Cùm autem interea rectæ B D ſupra ſpeculum eminentis alter terminus D, nullo præpeditus obſtaculo pari vehementiâ curſum quoque ſuum adnitatur promovere per rectam C D H; palàm videtur utriuſque conatibus adverſis non aliter faciliùs aut propius ſatisfieri poſſe, quàm ſi utrumque circa punctum Z rectæ B D medium rotationem concipiat. Sic enim utrumque pariter & quàm minimum à recto quem affectent curſu deflectent; ſiquidem rectæ B A, D C circulum B C D ♌ tangunt, centro Z per B & D deſcriptum. Cùm autem hujuſmodi motum circularem obeundo punctum B deſcripſerit arcum B C, & punctum D arcum D ♌, hoc eſt quando recta B D obtinuerit ſitum C ♌, etiam ipſum punctum D ſpeculo impinget ad ♌; reditúmque proinde per arcum ♌ D, ſcilicet ipſius quoque jam interciſo curſu, molietur; Sed & nunc temporis ipſum punctum B ad C poſitum per arcum C D tendit; quorum certè motuum adverſantium alter alterius effectum impediet; itáque proximo ſaltem, quoad fieri poterit, utrumque progreſſus arripient; proximi verò ſunt qui per tangentes C α, ♌ κ; qui & ſibi nihil repugnant, at potiùs omninò ſecum conſpirant; itaque punctum B per rectam C α, punctúmque D per rectam ♌ κ procurrent, adeò ut totus radius A B D C jam acquirat ſitum α C ♌ κ; & per hanc orbitam rectà motum ſuum proſequatur. Liquet autem angulos A B F, κ ♌ E æquari. Nam æquantur anguli Z B ♌, Z ♌ B; quapropter adjunctis hinc indè rectis Z B A, C ♌ κ totis A B F, κ ♌ E pares erunt. Unde patet è duobus quoque rectis reſiduos A B E, κ ♌ F æquari; quod propoſitum fuit oſtendere. Fig. 5.

III. Ità de præmiſſis ſuppoſitionibus noſtris fundamentalem hanc Catoptricæ legem ſeu regulam elicimus, quàm veriſimiliter aut concinnè

cinnè penes vos esto judicium. Non diffitebor autem aut penitus dissimulabo non esse nihil quod his objici possit, & dubitandi causam injicere. Cur enim, percontetur aliquis, quando solum punctum B vetsus A renitatur, & totum lineæ B D quod supereſt partes appetat contrarias, non circa punctum quodpiam aliud in ipsa B D, puncto B propinquius, ut puta circa X, potiùs ista gyratio concipiatur peragenda? Respondeo quàm brevissimè (quoniam incitato cursu tendens ulteriùs ægrè remoras fert) id in natura constanter accidere, quum motus rectus in circularem degenerat, ut extremæ sibimet adversæ mobilium partes omnem motum dirigant ac moderentur, reliquis ad illarum ductum componentibus se, motúsque suos attemperantibus; neque non his quos ob extremarum contrariſmum, atque conflictum amittere necesse habent in illas transfundentibus; quo fit ut mediis hinc indè quàm tardissimè dimotis extremæ velociùs revolvantur, Itaque cùm extrema puncta B, D partes in contrarium æquâ vi nitantur, neque nisi circa medium punctum Z rotatio peragatur, quod effectant assequi possint, id statim fiet, & reliquæ partes haud gravatim obsequentur. Nè dicam in recta B D nullum aliud punctum existere, cui præ aliis jure prærogativa competit, ut circa ipsum mobile libretur. At pluribus abstinens ad refractionis præcipuam legem haud absimili discursu proliciendam atque declarandam accedo. Hanc nempe:

Fig. 6.

IV. 6. Radii lucis alteri cuipiam dissimili perspicuo (nimirum homogeneo quoad se) incidentes ità refringuntur, ut perpetuò recti sinus inclinationum, quas habent incidentes, proportionales sint rectis sinubus inclinationum, quas obtinent refracti. Huic elucidando, stabiliendóque decreto; Parallelogrammum A B D C lucis radium repræsentans impingat planæ superficiei E F pellucidi medii (vel sit recta E F sectio communis, ut in casu præcedente, quod & abhinc semper intelligatur) progressum ejus aliquatenus retundentis. Itaque medium isthoc subingrediens punctum B procedere, tardiùs quidem, attentabit per rectam B G, seu peripsam A B protractam, interea verò punctum D in primo durans medio motum suum priorem adurgebit in recta C D H. Hos autem conatus, aliàs irritos futuros (nec enim utrumque potest rectum motum illud tardiùs, hoc velociùs incedendo conservare) quàm proximè consequentur, modò circa punctum aliquod in recta D B producta situm, puta quale Z, rotentur; ità scilicet ut dum punctum D in medio rariori (rarius appello quod minùs resistit, aut retardat; ut & densius quod motum magis reprimit, & tardiorem reddit) velociùs latum describit arcum majorem D ♪; punctum B tardiùs

tardiùs in medio contumaciore delatum minorem arcum B c delineet; quibus peractis recta B D tenebit ſitum c ♌. Cùm verò jam punctum D denſius quoque medium interet ad ♌; proindeque pariter & ipſum retardetur; motus iſti circulares protinus extinguantur oportet (nec enim jam punctum D velociùs feretur quàm B; nec ideò majorem ut priùs ſimul arcum deſcribet.) Itaque prius iter, quàm poterunt proximè, deferentia tendent utrumque per horum arcuum tangentes ♌ ♑, c ♑; radiuſque totus A B C D hoc modo detortus, & ſitum ♑ c ♌ ♑ nactus per hanc poſteà ſemitam rectà decurret. Adnotandum eſt autem quæcunque ſit rectæ A B ad rectam E F inclinatio arcus D ♌, B c (vel ſemidiametros Z D, Z B) eandem ſemper habere proportionem inter ſe; talem nempe, qualem in denſitate, ſeu reſiſtentia peculiare diſcrimen exigit. Etenim ſupponatur in quovis ſuperficiei pellucidæ loco poſitum nobile punctum B; cùm medium hoc ex hypotheſi ſit homogeneum (hoc eſt ubique pariter obſiſtens) nulla poteſt, opinor aſſignari ratio cur hoc mobile non in quaſvis partes æquâ velocitate deferri poſſit; nimirum æquè celeriter ad Q tender, (impetum modò ceperit iſthac dirigentem) per rectam O B Q, ac in N per rectam A B N. Adeóque radii lucidi A B, O B utcunque differenter inclinati parem omnino reſiſtentiam invenient; punctum, inquam, B, ſeu verſus Q, ſeu verſus N nitatur, æqualiter, eodémque modo retardabitur. Quinetiam cùm punctum D in primo medio ſemper eâdem, quæcunque fuerit ejus poſitio, celeritate promoveatur, ſatis apparet motus iſtos, aut motuum ſemitas eodem tempore decurſas, arcus nempe circulares D ♌, B c ſemper eandem inter ſe proportionem ſervare; nimirum illam, quam habent ſemidiametri Z D, Z B, vel Z ♌, Z B; quæ idcirco proportio, principaliter ac primariò, radiorum refractiones, ad eadem duo media factas, determinat atque metitur. Hanc autem eandem eſſe patet cum illa, quam habent recti ſinus angulorum ipſis Z ♌, Z B in triangulo Z ♌ B oppoſitorum. ipſorum ſcilicet Z B ♌ (vel Z B E) & Z ♌ B. Eſt autem angulus Z B E complementum anguli A B E, (hoc eſt angulus inclinationis rectæ A B ad E F) & angulus Z ♌ B eſt complementum anguli F ♌ ♑, vel inclinatio rectæ ♌ ♑ ad eandem E F. Igitur abunde liquet propoſitum. Patet verò, quod in hoc caſu, angulus E B Z major eſt angulo B ♌ Z; vel, ductis B M, ♌ N ad E F perpendicularibus, quòd angulus M B G major eſt angulo N ♌ ♑; adeóque quòd hic refractio verſus perpendicularem, quod aiunt contingit. Ac ità quidem quando radius radius in medium tranſit, ipſi magis obſiſtens, ſeu denſiùs. At ſi medio incurrit faciliorem tranſitum præbenti, ſeu rariori, planè ſimili modo, ſed inverſè ſe res habet.

Fig. 7.

Fig. 8.

Quod

Quod (licèt breviùs) conficeretur negotium adſumendo ſicut eadem *Thebis Athenas*, ac *Athenis Thebas* eſt via, ità radium de raro tranſeuntem in denſius, pérque denſius veſtigia ſua replicantem in rarum nil aliud quàm eandem ſemitam repetere; ut nempe ſi radius A B D C de raro tranſiens in denſius refringatur in α C χ ♪, quòd etiam hic radius α C χ ♪ è denſiori recidens in rarum viciſſim in A B D C refringetur; quia tamen aſſumptum illud non nemini demonſtrationis & ipſum indigere videatur; Et univerſim, extremóque rigore ſumptum forſan haud adeò verum ſit; majoris etiam evidentiæ cauſâ; preſertîmq; demùm quoniam huic caſui nonnulla quodammodò peculiaria ſunt notatu non indigna; quin addo quia præſtare videtur effectum unumquemque propriis è cauſis deduci) ſeparatim oſtendemus. Rurſum igitur radius A B D C, quâ priùs figurâ donatus rarioris medii ſuperficiem E F incurrat. Cùm igitur punctum B velociùs procedere jam valeat quàm anteà (medio ſcilicet illapſum promptiùs cedenti) hoc eſt quàm punctum D, neceſſariò commutabitur rectus utriuſque, quem affectant, motus in ei proximùm circularem, circa punctum aliquod in recta B D, puta circa Z; ità ut Z D, Z B talem inter ſe proportionem obſervent, qualem ſingularis exigit horum in reſiſtentia mediorum diverſitas; utique ſicut in quæ præceſſerunt; cùm verò punctum B ità circumductum deſcripſerit arcum B C, & punctum D arcum D ♪; puncto D ad ♪ tunc medium rarius ingredienti, ceſſabit iſta motuum inæqualitas; adeóque ſimul neceſſariò deſinet rotatus circa punctum Z; amboque puncta B, D per dictorum arcuum tangentes C α, ♪ χ (rectæ Z C perpendiculares) quod proximum eſt iter arripient. Rurſus autem, pariter ac in caſu præcedente, rectæ Z D, Z B (vel Z ♪, Z B) proportionem exhibent, quæ refractiones hujuſmodi dimetitur; habent autem Z ♪, Z B ſeipſas, ut recti ſinus angulorum Z B ♪, Z ♪ F; hoc eſt ut ſinus inclinationis rectæ A B ad ſinum inclinationis rectæ ♪ χ; quod propoſitum fuit oſtendere. Liquet autem quòd hic ang. Z ♪ F major eſt angulo Z B ♪, adeóque quod refractus divergit à perpendiculari.

Fig. 9.

V. Advertendum eſt porrò quoad priorem hypotheſin, ſeu caſum radii de medio rariori contendentis in denſius, eum ſemper, qualiſcunq; ſit ejus obliquitas, medium denſius ſubire; & per ipſum incedere; modo commonſtrato. [Simpliciter autem hoc, & abſtractè debet intelligi, nec ut accidentarium quicquam interveniat, qualia ſunt, opacitas perſpicuitati immiſta, figura diaphanum terminans, ejus craſſities inæqualis, aliud quid poſt poſitum diaphani reſiſtentiam promovens; cujuſmodi

cujuſmodi quippe de cauſis diaphanum ſubinde forſan evaſurum eſt opacum, & inſtar opaci radios valebit repercútere; ceu quando lapis in aquam impingit obliquè; cùm hydrargyro ſubſtracto vitrum munitur. Dum lapis *e. g.* obliquè impingit ſuperficiei E F (cui parallela O Q) per lineam A B; tota linea B Q ad fundum O Q protenſa venienti repugnabit, auxilii quoque nonnihil conferente fundo O Q; neque mirum fuerit, ſi major hic renitentia deprehendatur, quàm ubi radius alter M B P perpendicularius incurrit, quando major ſit B Q, quam B P.] At nos ſecluſis iſtis medium velut interminatum, in omnes partes æqualiter reſiſtens, abſolutè perſpicuum, & radios ex ſe non reſpuens accipimus; quibus ſuppoſitis perpetuò quod dixi, radius, obliquitate quâpiam incidentiæ nil vetante, medium denſius penetrabit. Verùm in alterò caſu, cùm de medio denſiori lux rarius incurrit, non ſemper ea medium hoc permeabit. Nam ſi magna ſatis fuerit obliquitas; ſubinde radius inflexus ſupra ſuperficiem E F attolletur, angulúſque (qui dicitur) refractus, aut inflexus rectum exſuperabit; quinimò fieri poteſt ut ipſum exæquet. Sit in exemplum primò inclinatio graduum 45, vel ſemirecta; Et Z B ad Z D ſe habeat ut quadrati diameter ad ſuum latus, quæ fermè proportio radiorum ex aqua in aërem tranſeuntium, experientiâ conteſtante, rationem metitur) radius velut in ipſam E F refringetur, aut eam ſtringens procedet. Eſt enim Z ♌ (æqualis ipſi Z D) jam ad E F perpendicularis, adeoque ♌ ∝ arcum ♌ D contingens ipſi E F congruet. Unde patet obiter, id quod ſuperiùs inſinuatum, non univerſim conſtare, quòd radius à quo loco medii unius in aliud proceſſit, ad eundem retrogradus accedet. Hoc enim ſaltem in caſu radius A B refringitur in ☾ ∝ ſuperficiei media dirimenti parallelam; veruntamen qui per ∝ ☾ progreditur minjmè recedet ad B A, nec ullam, ut manifeſtum eſt, omninò refractionem patietur. Sed hic caſus tantùm unus, & quaſi pro nullo cenſeri poteſt. Quod ſi, ſervatâ quoad denſitatem eâdem proportione, radius A B paullò magis ad rectam E F inclinetur, ejus. Refractus ſupra ipſam E F aſſurget; punctum quippe D rectam E F nunquam pertinget; & punctum B decurſâ rarius intra medium peripheriâ B ☾ in denſum remeabit; in quo proinde rurſus, circulatione ſuâ dimiſſâ, per tangentes ☾ ∝, ♌ ∝ ferentur; adeò quidem ut radius ABCD jam reflecti videatur, quatenus medium denſius haud penetrat totus, vel egreditur. Fig. 12. Fig. 13.

VI. Nec ineptè quidem (etſi quodammodò, velutique primariò, ſit refractio) reflectionis nomen adſciſcit hæc actio, quatenus & ipſa

reflectionis leges examuſſim obſervat. Nam quoniam iſoſcelis trianguli Z B c anguli Z B c, Z c B ſunt æquales, etiam anguli (de rectis reſidui) A B E, α c F pares erunt; quod reflectioni proprium eſt. Itaque non abs recto pronunciant hoc Dioptrici; neque tamen cauſam, fortaſſis ab iis prætermiſſam, tacere volui, nonnihil ab immediatæ reflectionis cauſa diverſam; nè quiſquam hæſitet, aut hoc adſumenti gravetur concedere.

Kepl. prop. 14.

VII. Hæc autem doctrina cùm multis experimentis utcunque comprobari queat, unum ſaltem breviter attingam ſatis illuſtre, neminiſq; non examini patens. Eſto triangulum A B C ſectio priſmatis triangularis æquilateri (nimirum vitrei, ſeu cryſtallini) baſi parallela; in hujus autem baſe ſumatur punctum quodpiam F, & ſit angulus C F G circiter graduum 50. (unde juxta doctrinam hic inſinuatam, & poſteà clariùs exprimendam, radius G F velut extremus erit eorum, qui rectæ B C è vitri partibus illabentes refractionem patientur; eo ſcilicet obliquior quilibet reflectetur.) Sit igitur (quoniam utramque quaſi patitur inflectionem) ejus refractus F M, reflexus F E; item F G refringatur in G O, & F E in E R. Porrò jam in G O ſtatuatur oculi centrum O; & ab eo prodeat radius O Q, qui refringatur in Q P; ipſorum O G, O Q refracti G F, Q P (uti ſecundum principia noſtra poſthac conſtabit) progredientes divergent; eritque propterea ang. Q P C ⊏ G F C; quare radius Q P medium B C penetrabit, ac refringetur, puta in P N; liquebit autem è dicendis refractos F M, P N à ſe divergere; Hinc jam radiis M F, N P interpoſitum objectum radiis O G, O Q interjectum apparebit, velut ad μ ν, ſitu neutiquam immutatum. Rurſus autem ab oculi dicto centro prodeat alter radius O K, cujus refractus ſit K I; hic itaque rurſum à G F diverget, ac indè erit ang. K I F ⊐ ang. G F C; adeóque K I minimè penetrabit medium B C, at reflectetur, puta in I H; tum I H refringatur in H S. Ergò jam radiis E R, H S interjacens objectum puta R S radiis O G, O K interjectum cernetur, velut ad ρ σ, ſitu partium everſo. Conſequuntur hæc doctrinam noſtram, & experientiæ liquidò conſentanea deprehendentur, quin & obſervatu dignum erit, è duplici refractione ſpectatum objectum M N Iridis coloribus tinctum adparere (rubro ſcilicet ad μ, cæruleo ad ν, croceo medium occupante) objecti verò R S è duplici refractione, ſed reflectione tamen intercedente, apprehenſi imaginem ρ σ colore nihil ab ipſo objecto differre. Quod ex eo ſanè videtur evenire, quoniam ang. F E B angulo F G C æquatur; adeóque radius K O non aliter è vitro exit, quam R E ingreſſus eſt;

Fig. 13.

ſeu

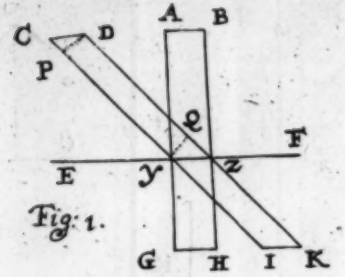


Fig: 1.

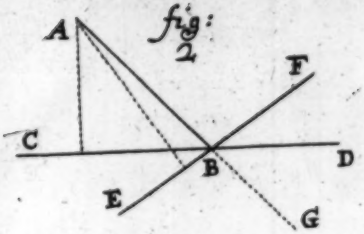


fig: 2

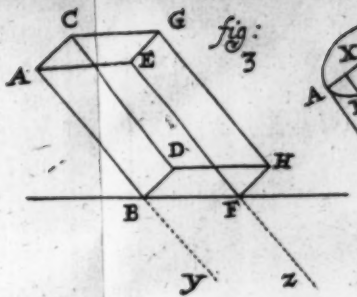


fig: 3

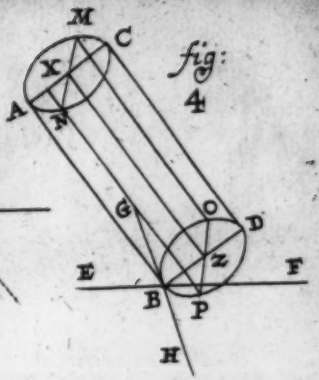


fig: 4

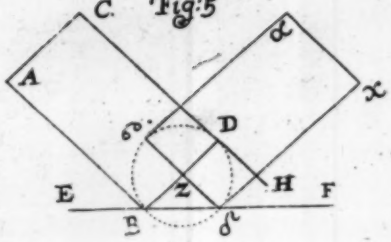


Fig: 5

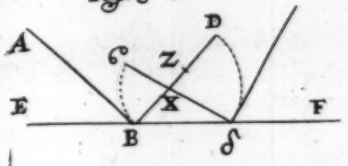


Fig: 6

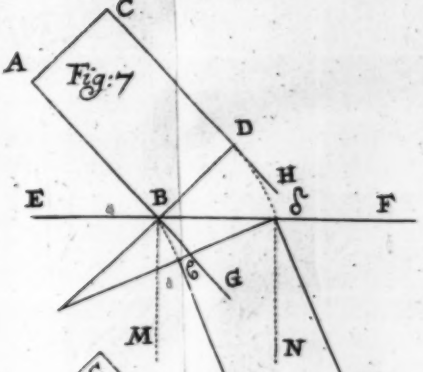


Fig: 7

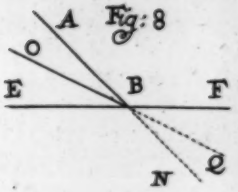


Fig: 8

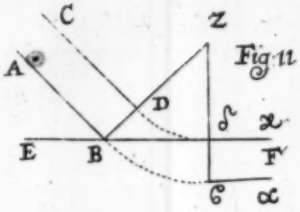


Fig: 11

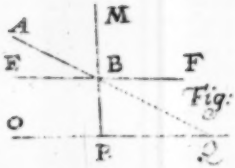


Fig: 10

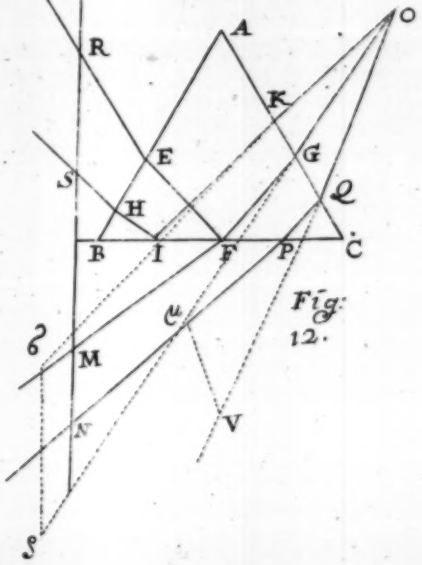


Fig: 12.

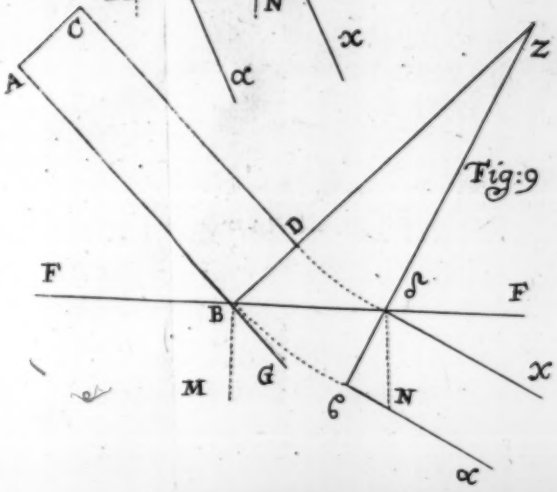


Fig: 9

Kepl. prop. 14.

Fig. 13.

ſeu quicquid retractio ad E effecit, id refractio ad K retexit, radium in ſtatum reſtituens, ei quem ab origine habuit non diſparem. Verùm hæc non eſt hujus loci penitiùs excutere, Saltem obſervari meretur hoc præcipuum, ut arbitror, in priſmate Phænomenon.

VIII. Hæc, inquam, cùm ab experientia confirmentur, neque tamen ei magis, quam ratiociniis noſtris conſentiant, cauſis tamen adſcribuntur (à quibuſdam) nedum diverſis, at prorſus adverſis. Quòd enim vitrum *e. g.* radios intra corpus ſuum receptos, ejúſque poſticæ ſuperficiei obliquius incidentes retrocedere cogat, hujuſmodi rationem exhibent: aiunt vitrum radios faciliùs admittere, vel tranſmittere quàm aërem; quin addunt aërem vi reflectendi prævalidâ pollere; quódque proinde qui poſt vitrum adventanti radio ſit obvius aër cum reverberat. Quæ ratio mihi non adblanditur. Nam imprimis rei naturæ minùs conſentanea videtur. Quum enim aëris corpus ex æthere puro maximam partem, è corpuſculis terrenis, & ex halitibus aqueis conſtare totum videatur; ex his partibus æther, opinor, non minùs promptè quàm vitrum radios tranſmitti; aqua verò ſaltem (ex illorum, quibuſcum diſputamus, ſententiâ) tantillo difficiliùs; adeóque neutiquam harum alterutri dicta reflectio jure videtur attribuenda; terreſtres autem particulæ (quæ præ reliquis etiam pauciores videntur, & rariùs interſperſæ, præſertim in aëre ſudo ſummiſque montium excelſorum jugis) ſunt opacæ, nec lucem admittunt, aſt eam in omnicunque pariter incidentiâ rejiciunt; adeò ut nec ad has quam reſpicimus lucis inflectio propriè ſpecter; ergò nihil ſubeſſe videtur cauſæ, cur aër (præ vitro) ingruenti luci potentiùs obſiſtat. Addo; ſi talis aëri vis reflexiva competat, & vera ſit, quam hi Philoſophi memorato Phænomeno cauſam adſignant, conſequi videtur, ut nulla prope Horizontem Stella conſpici poſſit (admiſſo ſaltem hoc, non inverecundo reor, ut pleriſque viſum erit, poſtulato; quòd purus Æther, naturale lucis vehiculum, aëreæ regioni ſupraJectus haud minùs facile quàm vitrum aut aqua radios intromittet.) Sit enim C terræ centrum, O oculus, S viſibile punctum longinquum, ceu ſtella, ſitum in Horizonte; per puncta verò C, O, S trajectum concipiatur planum faciens in terræ ſuperficie circulum O P; in atmoſphæræ, vel aëris circumfuſi, extima ſuperficie circumferentiam Z N M; itaque cum radius quilibet, ut S M, vel S N (Horizontalis puta, vel eò ſuperior) in ſuperficiem M Z cadens ei incidat perquam obliquè (niſi ſaltem atmoſphæræ Semidiameter C Z præ telluris Semidiametro C O dicatur enormiter, & incredibiliter magna) cùm & aër idcircò, juxta ſententiam quam expendimus, Fig. 14.

pendimus, lucem admittere non debeat; omnino dicti radii S M, S N, & consimiles reflectentur, & extra atmosphæram procul abeuntes oculum non pertingent. Quinimò satis constare videtur exhinc, quòd radii quales S N ut visum afficere queant, aut accedere, versus perpendicularem N C refringi debent; id quod adversariæ Hypothesi pariter adversatur. Verùm hæc obiter, ac in trancursu dicta sunto.

IX. Porrò, subnotandum est, quoad binos casus suprà tractatos, cùm duo media, diversimoda comparandò duæ se representent proportiones, altera, terminorum situm transponendo, alterius inversa, refractionum ideò mensuras (quoad hæc) iisdem terminis designabiles ordine permutari. Ut si in primo casu sinus rectus anguli incidentis se habeat ad sinum rectum anguli refracti, sicut A ad B, in secundo sinus incidentis ad sinum refracti se inversè habebit ut B ad A; nimirum in præcedentibus figuris, quanto Z D major est quàm Z B, in prima Hypothesi; tanto constat Z D minorem esse quàm Z B, in secunda; mediis scilicet iisdem permanentibus.

X. Denique, cùm medii cui radius impingit superficiem hactenus adsumpserimus planam, advertendum supereſt, quamvis illa curva sit, eodem tamen absque sensibili discrimine sese modo rem habere, ac si plano curvam superficiem isthic, ubi radius occurrit, contingenti impingeret. Incidat nempe radius A B C D in curvam lineam Q B R, quam ad incidentiæ punctum B tangat recta E F. Prorsus eodem modo refringetur iste radius ad curvam Q B R, quo ad rectam E F, nisi quòd isthic arcus D ♪ in rariori medio decursus tangentem aliquousque prætergreditur. Id quod eximiam radii subtilitatem considerando, quámque perexiguo distet intervallo punctum ♪ à curvæ vertice B, nullam omnino sensibilem (imò nec imaginabilem) inducet differentiam. Quantillus enim iste circulus esse debet, in quo chorda B ♪, radii latitudine paullo major, arcum subtendet aliqua cum ejus sensibili parte comparabilem? potest igitur angulus Z B ♪ æqualis supponi angulo Z B F; quo concesso reliqua fluent eodem tenore, quo præcedentia. Quin unà rationem exhibuimus suppositionis, quæ passim ab Opticis accipitur; ità tamen precariò, non ut subinde nullum in audientibus scrupulum relinquat; nec ut semper adsensu firmo concedatur.

Fig. 15.

XI. Ità primarias istas circa radiorum inflectionem Hypotheses (vel Axiomata malitis, aut Theoremata) quibus omnis incumbit Optica cujuscunque

cujuſcunque generis ſcientia, qualitercunque declarare ſtuduimus, & è principiis admodum affinibus elicere; modo, meâ ſententiâ ſaltem, omnium qui legenti ſe vel cogitanti ſuggeſſerunt, ſimillimo veri, cúmque tam rationibus Mechanicis, quàm experimentis Phyſicis, & cùm ipſa rerum natura congruentiſſimo. Neque nulla mihi tunc oboriebatur voluptas, cùm poſtquam inter alios iſta lucis ſymptomata explicandi modos hic ipſe ſemet ingeſſerat, eum examini ſubjiciens, Geometriæ legibus (aliquanto ſanè præter expectationem) adeò quadrantem comperiſſem. Meæ tamen eum tam fuſè diducendi pepercíſſem operæ, ſi quæ doctiſſimus *Maignanus* hiſce conformia, luculentius quidem opinor & accuratius, pertractavit, priuſquam hæc aggrederer contigiſſet inſpexiſſe; penes quem extare multa nil dubitem (nec enim eum adhuc curioſius evolvi) ſupplendis his, & confirmandis accommodata. Porrò fuit etiam animus, alias, quæ plurimæ traduntur, horum rationes percenſere, ac perſtringere (quarum mihi nonnullæ craſſâ petitione laborare; multum aliæ à re propoſita abludere; quædam animum ſubtilitate potiùs confundere, quàm vi conſtringere videbantur) verùm etiam huic exponendæ nimiſquam immoratus, hactenus inſinuatis contentus, omnes tranſiliam; illius ſaltem eruditiſſimi viri nefas fuerit non aſtipulari penitus, & acquieſcere decreto; "qui, De-"um unicum & Optimum Naturæ Architectum, hanc (ait) legem ra-"diis diverſa media permeantibus præſcripſiſſe; ut omnes omnino "radii veri, & apparentes eandem ſemper inter ſe ſervent analogiam. His, inquam, dimiſſis, ſuccedit ut è præſtructis emanantia quædam Poriſmata ſubnectamus.

Lect. III.

I. Hypotheſes Opticæ primarias, & fundamentales quaſi leges expoſuimus hactenus, & excuſſimus quomodocunque: Sequitur jam ut ex iis emergentia quædam (ad apparentiarum cauſas tam verè quàm expeditè diſcernendas conducentia) ſubjungamus corollaria; de cæteris quæ faciliora videntur, aut uſum præ ſe ferunt potiſſimum ſeligentes. Radios autem jam conſideramus, ut unicâ dimenſione præditos (ſiquidem reliquæ, quibus Phyſicè gaudent, parùm faciunt ad computationes hîc inſtitutas) ut lineas, inquam ceu vulgò fit, rectas concipimus à lucido quolibet aut aſpectabili puncto dimanantes. Quin & cum, hoc admiſſo, ſinguli cujuſque radii inflectio in ſuperficie peragatur ad planum inflectens recta (uti conſtat è præmiſſis) cùm & nobis præſertim mox inſtitutum ſit ſingulorum punctorum radiationes conſequentia ſymptomata ſic expendere, ut locos ipſorum apparentes determinemus, oculi reſpectu centrum habentis in ejuſmodi plano uſpiam conſtitutum; pro planis ubique rectas lineas, pro Sphæricis ſuperficiebus peripherias circulares, pro reliquis lineas reſpectivè congruas, brevitati conſulentes & perſpicuitati, ſubſtituemus. Porrò cùm quo præciſè modo peragatur viſio, quibúſque prædita ſit affectionibus adhuc expoſitum non ſit; Et de illa tamen ſubindè craſſius aliquid ac generalius dicendis intexere fortaſſis ex uſu fuerit, illa ſaltem pervulgata, poſt hac curioſiùs expendenda, jam προλεπτικῶς adſumemus; nempe: Viſibile punctum in illo radio ſitum apparere, qui procedens ab ipſo (directè vel inflexè) centrum oculi permeat; proindéq; ſitum objectorum è radiorum ità tranſeuntium poſitione judicari. Majora, minora, vel æqualia videri objecta, prout ipſorum extrema puncta radiis cernuntur angulos ad oculi centrum reſpectivè majores, minores, aut æquales conſtituentibus; diſtinctam unius cujuſque puncti viſionem radiis effici modo naturali, hoc eſt, divergenter, oculo illabentibus; Et ſiqua ſunt his agnata pariter obvia, ſeu manifeſta. Quinetiam, verborum parci, vocabulis paſſim receptis & uſitatis definiendis aut explicandis abſtinentes, ipſorum ſupponimus intellectum.

ctum. His utcunque majoris evidentiæ cauſâ, prælibatis, ad corollaria quæ diximus expromenda nos conferemus è veſtigio.

II. Imprimis autem (poſthac quidem in decurſu, quoad plures ſibi parallelos, aut ab eodem puncto divergentes (vel in idem convergentes) & huic vel illi ſingulari, quæ tractanda veniet, ſuperficiei incidentes (radios, ſingularia quotvis inflexos deſignandi compendia, radiationibus organicè examinandis profutura, tradituri) generales nunc aliquos incidenti cuivis propoſito competentem inflexum aſſignandi modos proponemus; quorum adhiberi poſſit, qui rei natæ videbitur accommodatior. Pro reflectione. Incidat radius A B ad B; Et per B ducatur Q B reflectenti perpendicularis; & fiat ang. α B Q = ang. A B Q, vel per B ducta ſit E F reflectentem tangens; & fiat ang. α B F = ang. A B E; liquetque factum eſſe, modo utrovis, quod requirebatur, Pro refractione vero; ducatur Q B refringenti perpendicularis, & ſuper diametrum (in hac liberè ſumptam) Q B deſcribatur ſemicirculus, incidentem A B ſecans in R; tum adjunctâ Q R, factóque I. R :: Q R. T (terminis autem I, R hic & dehinc perpetuò proportio refractiones metiens indignitatur) circulo Q R B adaptetur Q S ipſam T exæquans; erit connexa S B protracta nempe) incidentis A B refracta. ¿ Vel: per incidentiæ punctum B ducatur E F refringentem contingens; & in hac utcunque ſumpta B K ſit circuli diameter, incidentem A B ſecantis ad R; & fiat I. R :: B R. T; & adaptetur B S = T; erit S B α ipſius A B refractus: Vel demum: In ipſa A B ſumptâ utcunque diametro R B, ſuper hac deſcriptus circulus ſecet perpendicularem Q B ad Q; vel tangentem E F in K; fiátque I. R :: B K. T. & adaptetur Q S = T; erit rurſus S B α incidentis A B refractus. quorum ratio è poſitis inflectionum legibus admodum eſt manifeſta. verba piget impendere. Fig. 16. Fig. 17, 18, 19.

III. Radii cujuſvis incidentis inflexus inflexi viciſſim incidens evadet.

Hoc plerique, diverſè paullò prolatum, accipiunt, aut poſtulant. è præmiſſis autem facillimè colligitur. Idque potiùs methodi gratiâ (ſicut & nonnulla quæ ſequentur) quàm quia res meretur, oſtendemus. Pro reflectione; Radius A B ſpeculo E F impingens reflectatur in B α; dico radium B α permutatim in B A reflecti. Nam quoniam A B incidens reflectitur in B α, erit ang. α B F æqualis angulo A B E. Poſito jam α B incidere, etiam angulus quem facit ejus reflexus cum B E æquabitur angulo α B F; proinde non alius erit ab illo A B E quare B A ipſius α B reflexus erit. *Alhaz.* VII. 4. *Herig. Cataop. axiom.* 2. Fig. 1. 16.

Pro

Pro refractione vero: Incidat radius A B medio E F in B, & ifthic refringatur in B α, dico permutatim radium α B regredientem in B A refringi. Nam per occurſum B ducatur Q B P media dirimenti E F perpendicularis, & in hac utcunque ſumpto puncto P ducatur P G ad A B protractam perpendicularis, ut & P H ad B α, & producatur α B S. Eſt ergo P G ſinus rectus anguli incidentiæ A B Q ad radium B P, & P H ſinus anguli refracti Q B S ad eundem radium B P. Cùm itaque ratio P G ad P H refractionem metiatur è ſuperiori medio factam in inferius; etiam viciſſim rectarum P H, P G proportio refractionem determinabit ab inferiori medio factam in ſuperius. Unde ſi radius α B jam ponatur incidens, cùm ſint P H, P G recti ſinus anguli incidentiæ P B H, & anguli P B G, liquidum eſt ipſam H B in B A refringi.

Fig. 20.

IV. Angulo incidentiæ majori major competit angulus inflexus. (Angulum inflexum vocito, qui à perpendiculari continetur & inflexo; is proinde reſpectivè dicitur angulus reflexus, vel refractus. Angulus autem inflectionis (hoc eſt reflectionis reſpectivè, vel refractionis) appellatur is, qui comprehenditur ab incidente & inflexo; incidentiæ verò, nè quis ſecùs accipiat, apud nos angulus eſt, quem continent incidens & perpendicularis.) Quod propoſitum ſpectat effatum, id è poſitis principiis manifeſtè conſectatur. Etenim in reflectione ipſi anguli reflexi angulis incidentiæ proportionales ſunt; in refractione ſaltem recti ſinus angulorum refractorum ſinubus angulorum incidentiæ proportionantur. Unde liquido conſtat propoſitum: quorſum verba, quorſum Schemata multiplicem?

V. Cùm incidentes ad ſuperficiem mediam ſeſe decuſſant, iidem ſeſe inflectionem paſſi decuſſabunt, eodem ordine ſervato, quem directè progedientes habuiſſent (utique ſic ut perpendiculari poſt inflectionem propior incedat qui propior antea fuit.)

Hæc propoſitio reverà non differt à præcedente; quò demirer eam à non nemine principia noſtra uſurpante aliunde comprobari.

Herig. Diop. 8.

VI. Angulo incidentiæ majori major convenit angulus inflectionis. Quoad reflectionem, res extra dubium evidens eſt; angulus enim reflectionis incidentiæ majori conveniens eum planè continet, qui minori incidentiæ reſpondet. Pro refractione vero: ſit recta Q B P refringenti perpendicularis; incidant autem radii A B G, D B H (ſcilicet A B obliquius

obliquiùs quàm D B.) Horum verò refracti ſint B α, B ♪; dico angulum G B α majorem eſſe angulo H B ♪. Num ad B P in perpendiculari liberè ſumpta in diametrum conſtituatur ſemicirculus B G P, cui occurrant ipſæ A B, D B protractæ ad G, H; nec non ipſæ B α, B ♪ punctis α, ♪. Fiat autem angulus G B K æqualis angulo H B ♪, vel arcus G K arcui H ♪, connectatur etiam recta ♪ G, ſecans ipſam P K in X, ducaturque demùm ſubtenſa G ♪, H ♪. Jam ob angulos P G ♪, P H ♪ pares (arcui quippe P ♪ inſiſtentes ambos) & angulos G P K, H P ♪ ex conſtructione quoque pares, erunt triangula G P X, H P ♪ inter ſe ſimilia. Quapropter erit P G. P X :: P H. P ♪. eſt autem è lege refractionum P H. P ♪ :: P G. P α. quare P G. P X :: P G. P α; unde P X = P α. eſt autem P X minor quàm P K (quia tota ſubtenſa G ♪ intra circulum jacet.) Quare P α minor eſt quàm P K, adeoque P K ſecabit angulum G P α. quamobrem arcus G α major erit arcu G K, hoc eſt arcu H ♪. & idcirco major erit angulus G B α angulo H B ♪: Q. E. D. Fig. 21. Fig. 22.

Procedit hæc demonſtratio quoad caſum, ubi I ⊏ R (vel cùm radius è medio rarioti denſius ingreditur) at exinde quoad alterum quoque caſum facilè deducitur concluſio. Nam ſi viciſſim α B, ♪ B concipiantur incidentes, erunt ipſæ B A, B D earum refractæ; ac etiamnum anguli α B G, ♪ B H erunt anguli refracti.

Hujuſce Theorematis apud *Herigonium* habetur alia demonſtratio. Confer ſodes, & utramvis elige. Nos quam res obtulit poſuimus. *Diopt. Prop. 4.*

VII. In iſto refractionis caſu, quum I minor eſt quàm R, ſi anguli incidentiæ, puta anguli D B Q, rectus ſinus P H, ad ſinum totum ſe habeat ut I ad R; nullus incidente D B obliquior radius medium E F refractus ingredietur, aut penetrabit. Fig. 23.

Nam penetret (ſi fieri poteſt) obliquioris alicujus A B G refractus B α. Erit ergo P G. P α :: (I. R ::) *P H. P B. eſt autem P G major quàm P H. ergo P α major erit quam P B. quod planè fieri nequit. Ergò A B non refringetur in medium ipſi E F ſubjectum. * *Hypoth.*

VIII. Angulus incidentiæ major ad angulum ſuum refractum majorem habet rationem, quam angulus incidentiæ minor ad refractum ſuum.

Erit ſcilicet (in figura numeri Sexti, cujus huc apparatus transferatur) ang. G B P. α B P. ⊏ ang. H B P. ♪ B P. Nam triangula Fig. 21, 22.

GP ∝, HP ♪ ità disponantur, ut latera PG, PH sibi congruant (unde major angulus GP ∝ minoretur HP ♪ comprehendet) tum centro P per ♪ describatur circulus E ♪ F ipsas PG, P ∝ secans punctis F, E, item connexâ EH, centro H per ♪ transeat circulus H M N ipsas HP, HE secans punctis N, M; denuò connexa E ♪ cum PG conveniat in L. Estque jam ang. ∝ P ♪. ang. ♪ PH :: sector EP ♪. sector ♪ PF ⊏ triang. EP ♪. triang. ♪ PL :: E ♪. ♪ L :: triang. EH ♪. ♪ HL ⊏ sector MH ♪. sector ♪ HN :: ang. EH ♪. ang. ♪ HP. est igitur ang. ∝ P ♪. ang. ♪ PH ⊏ ang. EH ♪. ang. ♪ HP. ergòque compositè ang. ∝ PG. ang. ♪ PH ⊏ ang. EHP. ang. ♪ HP. permutandóque ang. ∝ PG. ang. EHP ⊏ ang. ♪ PH. ang. ♪ HP. est autem HP. PE :: HP. P ♪ :: I. R :: GP. P ∝. adeóque EH ad ∝ G parallela; vel ang. EHP = ang. ∝ GP. ergò erit ang. ∝ PG. ang. ∝ GP ⊏ ang. ♪ PH. ang. ♪ HP, hoc est ang. ∝ BG, ∝ BP ⊏ ang. ♪ BH. ang. ♪ BP. vel componendo ang. GBP. ang. ∝ BP ⊏ ang HBP. ang. ♪ BP. Quod erat demonstrandum.

Corol. 1. Ang. ∝ BG. ang. ∝ BP ⊏ ang. ♪ BH. ang. ♪ BP.
2. Ang. ∝ BG. ang. PBG ⊏ ang. ♪ BH. PBH.

Opportunum est hoc Theorema conciliandis cum experientia propositis refractionum legibus. Ut demirari subeat nuperrimum Opticæ scriptorem, virum alioqui diffusè doctum, hujusmodi ratiocinio leges istas impugnâsse: "In majoribus tamen angulis inclinationis (ipsissima sunt ejus verba) falsum esse constat (principium nempe nostrum;) in his enim angulus refractionis major est subtriplo anguli inclinationis; quod mihi aliisque ex luculentis experimentis compertum est. Hæc, inquam, ille παίζων. Quasi verò dixisset; numeri 6 & 4 simul accepti non conficiunt 10, quia numerum efficiunt majorem quam 8. planè similis est discursus; non ovum ovo similius. Nam in refractionibus ex. gr. ad vitrum factis si ponatur ad quamvis inclinationem (puta graduum 15.) quòd sit angulus refractionis subtriplus anguli inclinationis (quem ille vocat, incidentiæ nos angulum appellare solemus) necessario, sicuti modò demonstratum est, è principio nostro consequetur, quòd ad aliam quamcunque majorem inclinationem refractionis angulus major erit subtriplo anguli inclinationis; nominatim acceptâ graduum 30 inclinatione juxta dictum principium institutus calculus angulum præbebit refractum 19. 24'; angulúmque proinde refractionis 10. 36', qui 30 graduum trientem exuperat. Quare cùm Clarissimus vir Hypothesin hanc (à

Cartesio

Cartesio quidem primò repertam, sed ab aliis plerisque recentioribus opticis *Mersenno*, *Herigonio*, *Hobbio*, *Maignano*, quin & ipso ejus consodale doctissimo *Ricciolo* susceptam & approbatam; quam & certè hujus scientiæ non parùm interest veram deprehendi) labefactatum iret; eam potius imprudens experientiæ Suffragio communivit. Quinimo si quid insit huic principio vitii, illud potius erit, quod in maximis inclinationibus refractionis angulos exhibet apparentibus aliquantillo majores; quæ tamen discrepantia num ipsius legis hujus, an experimentorum defectui, vel accidentariis quibusdam intervenientibus causis adscribi debeat, haud facilè pronunciaverim. Nec enim fortassis cognata reflectionis lex, à nemine non admissa, experimentis omnibus præcisè responderet. Nobis sufficiet quòd in reliquis inclinationibus, mediis præsertim, dicta lex experientiæ, quam præferunt authores, perquam consentanea reperitur; addo, quòd ab ea deductæ conclusiones cum experientia mirè conspirant; nec ab ea quòd animadvertere potuerim, unquam discordant. Eam proinde (cùm alia probabilis haud suppetat, Geometricis, ratiociniis præsternenda) non verebimur ubivis ut ratam sumere, ac adhibere; satis certi (apud nos saltem) in elicitis ab ea conclusionibus haud omnino quicquam notabilis erroris emersurum.

IX. Obiter hîc & παρεμβατικῶς problemation quoddam interseram (quia Schema num. 6, superius ei gratis inserviet, ejusque constructio è superiore constructione derivatur.) Per datum in refringente punctum (B) incidentem ducere, cui datus conveniat angulus refractionis. Ducatur B P refringenti perpendicularis (hanc autem duci posse supponimus, aut postulamus) & ad diametrum B P construatur semicirculus; & sit utcunque P G . P α :: I . R (pro P G verò præstat ipsam diametrum P B accipere) sumatúrque Arcus G K subtendens angulum parem dato. Fiat autem P X = P α. & per G, X ducta recta circulo occurrat in δ. demum accipiatur Arcus δ H = G K, erit ductæ B H refractus B δ (uti præcedentem discursum invertendo non difficilè colligitur) adeóque liquet factum esse quod erat propositum. Hoc præter ordinem; ergo perfunctoriè. Fig. 21.

X. Cujuscunque generis lineæ R B S incidat radius M N O ad N, sitque dictæ lineæ perpendicularis recta N C; & in hac utcunque sumpto puncto C, per hoc transeat incidenti parallela C B; quâcum conveniat ipsius M O inflexus G N K; erit in reflectione K N = K C; in refractione verò K N, K C :: I . R. (vel item, si in ipso inflexo Fig. 24, 25.

sumatur utcunque punctum K, & ab eo ducta KL ad perpendicularem CN parallela cum incidente conveniet ad L, erit illic KN = NL, & hic KN. NL :: I. R.

Fig. 24, 25. Nam 1. in reflectione, quoniam ang. ONC = KNC (ex lege reflectionis.) Et ang. ONC = KCN (ex Hypothesi quòd ON, CB parallelæ sunt) erit ang. KCN = ang. KNC. adeóque KN = KC = NL. Q. E. D.

2. In refractione, ducantur CE ad NO, & CF ad NK perpendiculares (unde liquet puncta E, F existere in circulo super diametrum CN descripto) quare, connexâ EF, erunt anguli CEF = ang. FNC (eidem insistentes peripheriæ FC) æquales. Item propterea est ang. ECF = ang. ENE = ang. NKC. quare triangula ECF, NKC sunt æquiangula sibi mutuo, quamobrem est CE. CF :: KN. KC. atqui (juxta legem refractionis) est CE. CF :: I. R. qua propter erit, KN. KC :: I. R. vel KN. NL :: I. R. Q. E. D.

XI. Quod si per N ducatur tangens UT, erit (in reflectione) etiam KT = KN, & NT angulum MNK bisecabit. In refractione verò erit KT ad KN, ut co-sinus anguli refracti, ad cosinum anguli incidentiæ. Quæ saltem ad noto, ceu Lemmatica.

XII. Exhis facilè deducantur Conicarum Sectionum circa radiorum inflectionem satis jam pervulgatæ proprietates, at quæ fortasse per nimias ambages.

1. Demonstratæ prostant. Ut in parabola (puta RBS, cujus axis BC) incidat MNO axi BC parallelus, ejusque reflexus sit NK, erit igitur (ex ostensis) KN = KC. at si punctum K ponatur umbilicus parabolæ; erit etiam indè (juxta notissimam hujusce curvæ proprietatem) KN = KC. quare paralleli radii reflexus necessariò per umbilicum transibit, qui propterea non immeritò quoque *focus* appellatur.

Fig 26. 2. Item *in ellipse*, cujus axis BD, foci H, K, si ad quodvis curvæ punctum N à focis ducantur rectæ HN, KN, satis celebre est, quòd perpendicularis CN angulum HNK bisecabit. Unde NH. NK :: HC. CK. & componendo NH + NK. NK :: HK. CK. vel BD. NK :: HK. CK. vel permutando BD. HK :: NK. CK. quare si talis fuerit ellipsis, ut sit BD. HK :: I. R. etiam erit NK. CK :: I. R. verum si incidens MN ad BD parallelus refringatur in NK, erit (juxta mox ostensa) etiam NK. CK :: I. R. patet itaque quòd ipsius MN refractus per focum K transibit. Quid plura?

3 Non

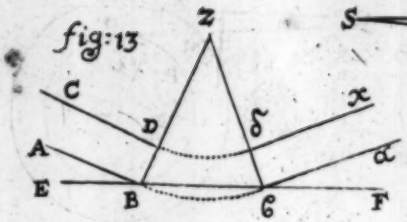
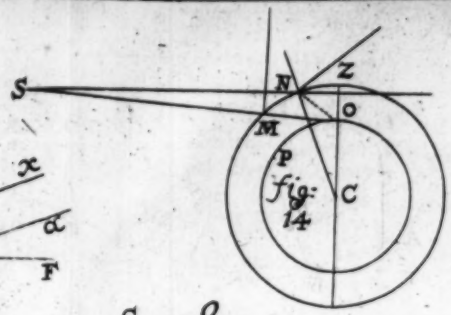


fig: 13
Z
C
D
δ
x
A
α
E
B
6
F


S
N
Z
O
M
P
fig: 14
C

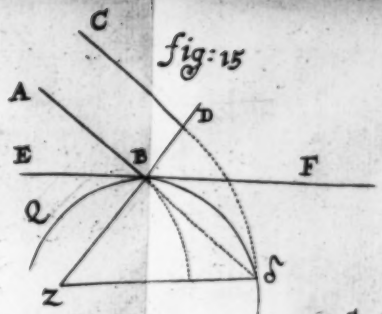
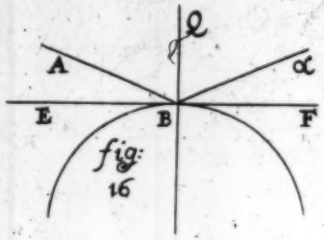
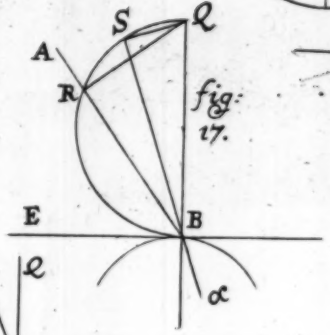
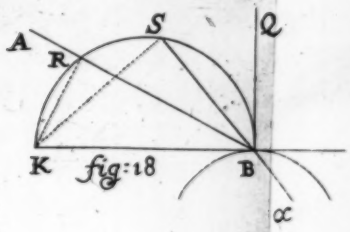


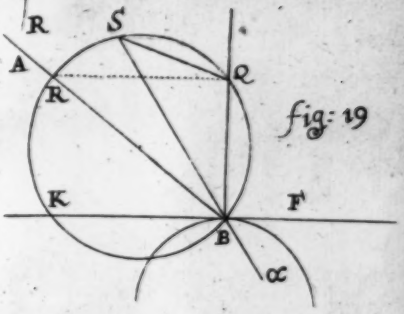
fig: 15
C
A
D
E
B
F
Q
Z
δ

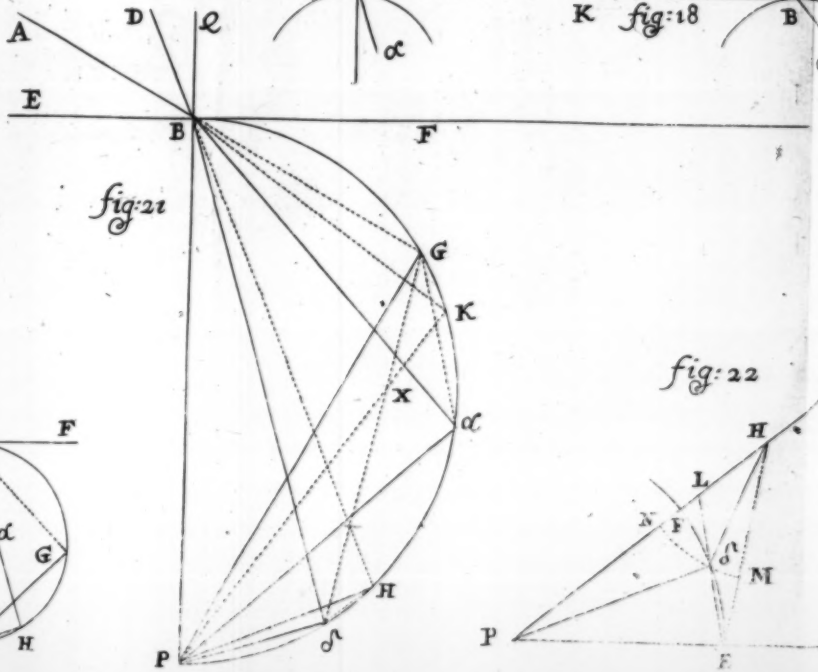

Q
A
α
E
B
F
fig: 16

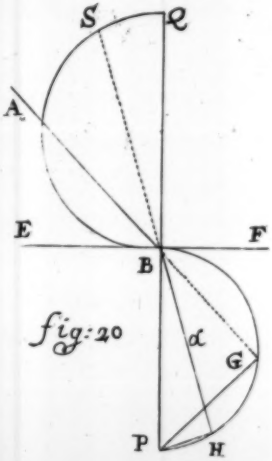

S
Q
A
R
fig: 17.
E
B
α

T


A
S
Q
R
K
fig: 18
B
α


R
S
A
Q
fig: 19
K
F
B
α


D
Q
A
E
F
B
fig: 21
G
K
X
α
H
P
δ


S
Q
A
E
F
B
fig: 20
α
G
P
H

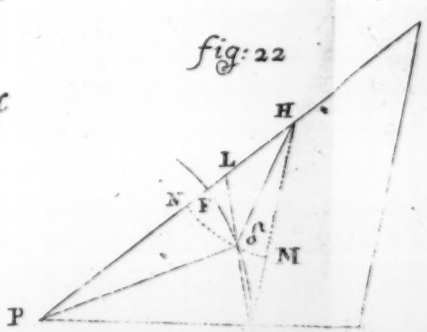


fig: 22
G
H
L
N
F
δ
M
P
E
x

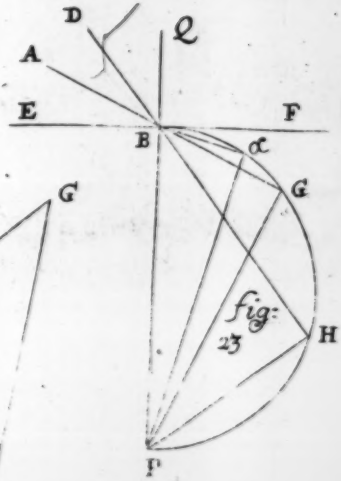

D
Q
A
E
F
B
α
G
fig: 23
H
P

Fig. 24, 25.

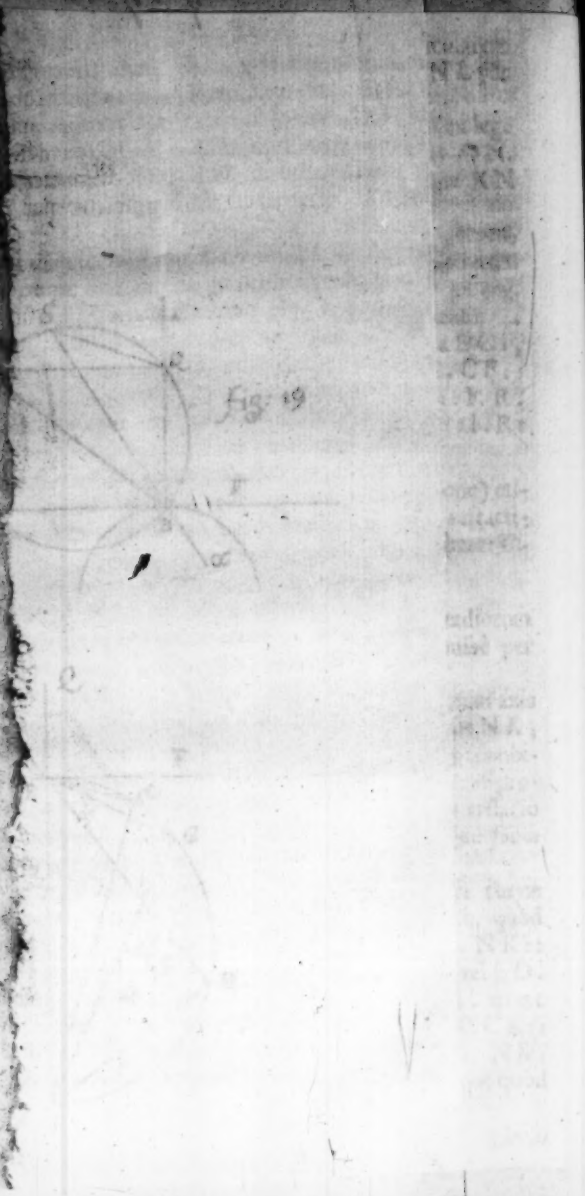


Fig. 26.

3. Non absimiliter in *Hyperbola*, (cujus itidem axis B D, foci H, K; reliquisque velut antea præparatis) ostendetur fore perpetuò N K. C K : B D. H K. unde si fuerit (ex *Hyperbolæ* constructione) B D. H K : I R. erit etiam N K. C K : I R. quod si radius M N ad C B parallelus refringatur in N K; hoc idem accidet, ut nempe sit N K. C K : I R. quare radii M N refractus per *Hyperbolæ* focum transibit. Fig. 27.

4. Quòd verò ab *Ellipsis* aut *Hyperbolæ* cujusvis focorum alterutro quilibet curvæ incidens radius in alterum reflectatur, admodum facilè dilucescit. Nam in ellipse, perpendicularis N C, in *Hyperbola*, tangens N T bisecat angulum H N K. unde patet propositum, Hæc extra nostras oleas posita cursim & levissimè perstringo; nec tamen ut eò multa putem desiderari.

Revertamur in orbitam; & quidem derelictis his generalissimis, ac abstractissimis, lemmatum vicem obituris, ad particularia descendamus. Ad planas verò superficies (vel earum loco propter insinuatam antehac causam subrogatas lineas rectas) inflexis obtingentia radiis primò contemplemur. Etiam quoad has Catoptricis primum, utpote facillimis, brevissimè defungemur.

XIII. 1. Parallelorum sibi radiorum (A B, M N) rectæ (E F) incidentium reflexi (B α, N μ) sunt etiam sibi paralleli. Fig. 28.

Nam quoniam A B, M N ex hypothesi sunt paralleli, erunt anguli A B E, M N E pares. Ergò sunt anguli α B F, μ N F etiam pares. Quare rectæ α B, μ N sunt parallelæ.

XIV. 2. Sit recta A B Z rectæ reflectenti E F perpendicularis; cum hac verò promanantis ab A cujusvis radii A N reflexus α N conveniat in Z; dico forè B Z = A B. Nam ang. A N B = ang. α N F = Z N B. quare liquet triangula B N A. B N Z. sibi mutuò æquilatera fore; & esse A B = B Z : Q. E. D.

XV. 3. Hinc, omnes ab uno puncto, divergentium tanquam ab altero quodam uno prodeuntes. Fig. 29.

Quoad punctum longè dissitum (suo parallelos ad sensum radios ejaculante) patet è penultima. Quòad punctum è sensibiliter finita distantia radians, ex ultima patet, quòd omnium ab A divergentium radiorum reflexi protracti concurrunt in Z; adeóque videbuntur ab eo promanare.

XVI.

XVI. Hinc punctum Z erit ipſius A (reſpectu oculi uspiam conſtituti) imago perfectiſſima. Siquidem imaginis vocabulo nil aliud intelligo, quàm locum à quo plures radii (quot ſcilicet afficiendo viſui ſufficiunt) ſimiliter divergere, ſeu dimanare videntur, atque cùm à primariis objectis diffunduntur. Proinde cujuſvis hoc modo radiantis objecti locus apparens, vel imago facilimè determinatur.

XVII. Exhinc etiam eâdem operâ, viſus imaginem adſpectantis axis, ſeu reflexus principalis (iſte nimirum qui per oculi centrum (puta O) tranſit,) & reflectionis (quod vocant) punctum determinantur. Connexa nempe recta O Z erit axis iſte, nec non ejus cum E F interſectio N, punctum reflectionis.

XVIII. Quoad hoc reflectionis punctum unicam ſubjiciemus annotatiunculam. Radiante puncto A, & oculi centro O fixis manentibus recta Catoptrica E F ponatur rectæ cuidam O P parallela, ſed alioquin ſitu indeterminata; erunt omnia reflectionis puncta in *Hyperbola*. Sit, inquam, A P ad O P perpendicularis, & biſecentur A P in X, atque P O in Y; & per X ducatur X G ad P O parallela, item per Y ducatur Y H ad A P parallela; & X G, Y H concurrant in C; tum Aſymptotis C G, C H per ipſum O deſcripta concipiatur *Hyperbole* R O S; hæc per omnia reflectionum dictarum puncta tranſibit. Nam utcunque ducta E F ad P O parallela *Hyperbola* R O S occurrat ad N; & ducantur rectæ A N, O N; dico angulum A N E angulo O N F æquari. Secet enim A P ipſam E F in B; & ducatur O Q ad A B parallela. Et, ex *Hyperbola* natura, eſt C D. C Y :: Y O. D N. quare dividendo erit Y D. C Y :: Y O — D N. D N; hoc eſt O Q. C Y :: N Q. D N. & permutatim O Q. N Q :: C Y. D N. item rurſus ob C D. C Y :: Y O. D N. erit componendo C D + C Y. C Y :: Y O + D N. D N. hoc eſt A B. C Y :: B N. D N. vel permutando A B. B N :: C Y. D N. quare eſt O Q. N Q :: A B. B N. ergò rectangula triangula, O Q N, A B N ſimilia ſunt; & patet angulum O N Q angulo A N B æquari: Q. E. D.

Fig. 30.

Mereri ſaltem vel *Hyperbola* gratiâ videbatur hæc ejuſce proprietas adnotari; quin & Analogiæ cauſâ verſus ea quæ ſequentur. Neque de reflectionibus ad plana quicquam prætereà. Ad refractiones tranſeo.

LECT.

Lect. IV.

EAD ea jam accedimus quæ radiis obveniunt ad planam ſuperficiem, vel ad rectam lineam, refractis. Quod argumentum eo diligentius proſequemur, quia nondum pro merito ſuo videtur ſatis excultum; ut & quoniam in eo tractando methodum præſtituemus nobis, & quaſi normam in ſequentibus obſervandam. Ad rem.

II. Parallelorum rectæ lineæ (E F) incidentium radiorum (A B, M N) refracti (B α, N μ) ſunt etiam ſibi paralleli. Nam quoniam A B, M N ſunt, ex hypotheſi, paralleli, erunt anguli A B E, M N E pares. Itaque refractos habent angulos pares; horúmque complementa (ſcilicet anguli α B F, μ N F) æquantur, quare liquet refractos B α, N μ ſibi parallelos eſſe. Fig. 31.

III. Hinc infinitè diſtantis, hoc eſt parallelos radios emittentis (infinitam ad ſenſum diſtantiam intelligo, qualis eſt quoad hoc ſtellæ cujuſpiam) puncti locus apparens, aut imago per hujuſmodi refractionem effecta infinitè quoque diſtat; quippe cùm hæc etiam per radios parallelos adſpectetur. Itaque ſitus ejus reſpectu visûs ubivis poſiti facilè determinatur. Sit oculi puta centrum O; & A punctum radians immenſè diſſitum; connexaque A O refringentem E F ſecet in G; ſitque radii A G refractus G α; per O verò ducatur O B Z ad α G parallela; in hac ad infinitum protenſa (velut ad Z) apparebit punctum A. Cùm enim radii A G, A B ſint (ad ſenſum) paralleli, etiam ipſorum refracti erunt paralleli. Quare cùm G α ſit refractus ipſius A G, erit B O, ad G α parallela, etiam radii A B refractus. Ergò punctum A in recta O B protenſa apparebit. Quoad hujuſmodi radiationem nil ſuccurrit aliud; itaque de propinquo radiantis puncti ſymptomata contemplemur. Fig. 32.

IV. Sit recta A B rectæ refringenti E F perpendicularis; in qua ſit punctum radians A, ab E F haud ad ſenſum longè remotum; ab hoc autem Fig. 33.

autem procedentis cujusvis radii (ceu A N) refractus N a cum ipsa A B
Lect. 3. num. 9. (protractus utique, vel retractus) conveniat in K; dico fore N K. N A :: I. R. (Neque non inverse, si fuerit N K. N A :: I. R; erit K N a ipsius N A refractus.)

Hoc è superius ostensis immediatè consectatur. Et hinc etiam satis apparet, quoniam (id quod bene notetur, ut passim in sequentibus assumendum) angulus N A B, æquatur angulo incidentiæ; (quippe cum is complementum sit anguli A N B;) & angulus N K B (complementum videlicet anguli K N B) æquatur angulo refracto. Cùm itaque
Fig. 34, 35. sit hinc sinus anguli N A B (vel anguli deinceps N A K) ad sinum anguli N K A, ut I ad R; etiam in triangulo N A K latus N K ad latus N A sese habebit ut I ad R. Quod E. D. Quinetiam si latera N K, N A se habeant ut I ad R; etiam dictorum angulorum sinus ità se habebunt; unde constabit ipsam K N a ad A N pertinere.

V. Hinc particularis emergit expeditissimus modus hujusmodi quotcunque refractos designandi. Nempe per radians punctum A ducatur A B refringenti E F perpendicularis; & fiat A B. Z B :: R. I; tum per Z ducatur recta G H ad E F parallela. Proponatur jam quilibet incidens A N, cui conveniens designandus est refractus. Eum sic dedesignaveris. Protrahatur N A (si opus) ut cum G H conveniat in S; & centro N per S describatur circulus ipsam A B secans in K (secabit utique si refractus aliquis ad incidentem A N pertineat) erit connexa K N, protractáque radio A N debitus refractus. Etenim est K N. A N :: S N. A N :: Z B. A B :: I. R :: K N. A N. unde liquet (è præcedente) propositum.

VI. Exhinc etiam hujusmodi refractionis præcipua symptomata perfacili colliguntur Negotio; quæ seorsim acceptis, & quæ secum mutuò collatis accidunt refractis; hoc imprimis: In primo casu (quum nempe refractio fit è rariori in densius, seu quum I ⊏ R) concursus refractorum cum recta A B (quam subinde radiationis hujus axem appellare licebit) supra punctum Z existit. Nam connexâ N Z; quoniam ang. N Z S recto B Z S major est, erit N S (vel N K) ⊏ N Z; adeoque B K ⊏ B Z. Item, in secundo casu (quum media contrariè se habent) dictus concursus infra punctum Z existit. Etenim rursus connexâ N Z; est ang. N S Z recto A Z S (interno) major, adeóque N Z ⊏ N S, vel N K; & ideò B Z ⊏ B K.

VII. Hinc liquet punctum Z esse limitem ultra vel citra quem (re-
Fig. 35. spectivè) omnes refracti cum axe A B concurrunt. Quinimò quòd ipsius

ipſius perpendicularis AB (quaſi) refractus in ipſum punctum Z terminatur. Porrò:

VIII. *Lemma*: ſit AB ad EF normalis, & à duobus in AB ſumptis utcunque punctis A, I (quorum A proprius ipſi B) ad duo puncta quæ vis M, N in ipſa EF acceptis (quorum verò M ſit ipſi B vicinius) connectantur rectæ AM, AN; & IM, IN; dico fore AN. AM ⊏ IN. IM.

Nam centro N per A deſcribatur circulus PAOR (rectas IM, IN interſecans punctis O, R) & per R ducatur RT ad EF parallela, ſecans IM in S. Et ob angulum NRT obtuſum, patet rectam RT extra circulum totam excidere; unde SM ⊏ (OM ⊏) AM. adeóque AN. AM ⊏ AN: SM :: RN. SM :: IN. IM. liquet igitur eſſe AN. AM ⊏ IN. IM: Quod E. D. Hinc

Si duorum radiorum AM, AN (quorum hic obliquior) refracti Mα, Nα cum axe AB conveniant punctis I, K, erit in primo caſu IB ⊐ KB; in ſecundo IB ⊏ KB. Etenim connexâ IN; eſt in primo caſu, NK. MI :: NA. MA ⊏ NI. MI. adeóque NK ⊏ NI. unde BK ⊏ BI. aſt in ſecundo, NK. MI :: NA. MA ⊐ NI. MI quare NK ⊐ NI; & indè BK ⊐ BI. Fig. 37.

IX. *Coroll.* Refractorum in primo caſu concurſus extra angulum ABN verſantur; in ſecundo, intra eundem. Sed hæc eadem in decurſu liquidius, ac multifariàm conſtabunt.

X. Porrò, bina quoad hos caſus *Theoremata* ſubjiciemus, uſus haud contemnendi.

1. Si fiat (in primo caſu) YB. AB :: I. √Iq—Rq. ſit autem cujuſvis incidentis AN refractus KNα; & connectatur YN: erit KB. YN :: √Iq—Rq. R. Fig. 39.

Nam ob YBq. ABq :: (a) Iq. Iq—Rq. erit per converſionem rationis YBq. YBq—ABq :: Iq. Rq :: (b) KNq. ANq. & permutando YBq. KNq :: YBq—ABq. ANq. componendóque YBq + KNq. KNq :: YBq + BNq. ANq. (nempe YBq—ABq + ANq = YBq + BNq; quoniam ANq—ABq = BNq) Quarè rurſus permutando eſt YBq + KNq. YBq. + BNq :: KNq. ANq. dividendoque KNq—BNq. YBq + BNq :: KNq—ANq. ANq; hoc eſt KBq. YNq :: Iq—Rq. Rq: Q. E. D.

(a) *Hypoth.* (b) *4 hujus.*

XI. *Corol.* 1. Hinc ſi duo refracti M α, N α cum Axe AB conveniant in I, K; & à puncto Y ad incidentias ducantur rectæ YM, YN, erit KB. IB :: YN. YM. Nam KBq. YNq :: Iq — Rq. Rq :: IBq. YMq. quare permutatim KBq. IBq :: YNq. YMq.

Fig. 40.

XII. 2. Hinc etiam ſi refracti MI, NK conveniant in X; & demittatur XP ad AB parallela; & huic protractæ MY, NY occurrant in R, S; erit NS = MR. Nam XP. SN :: KB. YN :: IB. YM :: XP. RM. cum itaque ſit XP. SN :: XP. RM; erit SN = RM.

XIII. 2. In ſecundo caſu; ſit cujuſvis incidentis AN refractus KN α; & fiat YBq. KBq :: Rq. Rq — Iq; & connectatur YN; erit ABq. YNq :: Rq — Iq. Iq.

Nam quia KBq = KNq — BNq = KNq — YNq + YBq; erit (hypotheſin perſequendo) YBq. KNq + YBq — YNq :: Rq. Rq — Iq :: ANq. ANq — KNq. & per rationis converſionem YBq. YNq — KNq :: ANq. KNq. (eſt autem YBq = YNq — BNq = YNq — ANq + ABq) ergò YNq — ANq + ABq. YNq — KNq :: ANq. KNq (hoc eſt, antecedentes & conſequentes adjungendo) :: YNq + ABq. YNq. quare dividendo ANq — KNq. KNq :: ABq. YNq hoc eſt Rq — Iq. Iq :: ABq. YNq : Q. E. D.

Fig. 41.

XIV. *Corol.* 1. Hinc rurſus, ſi duo refracti Mα, Nα ſecent axem punctis I, K, ipſos autem ſe decuſſent puncto X; & fiat YP. XP :: R. √Rq — Iq. & per Y ducantur MYR, NYS; erit NS = MR.

Nam SB. KB :: YP. XP :: R. √Rq — Iq. quare AB. SN :: √Rq — Iq. I. item RB. IB :: YP. XP :: R. √Rq — Iq. quare AB. RM :: √Rq — Iq. I. ergò AB. SN :: AB. RM. quare SN = RM.

2. Hinc SB. RB :: KB. IB.

Fig. 42.

XV. Porrò, notandum eſt quò radii ab A manantes axi viciniores ſunt eò refractos ipſorum ſpiſſiùs incedere; ſeu minora fore concurſuum interſtitia; ut nempe ſi in refringente EF ſumantur æqualia intervalla MN, NO; & radiorum punctis M, N, O incidentium refracti Mα, Nα, Oα cum axe concurrant punctis I, K, L; erit intervallum

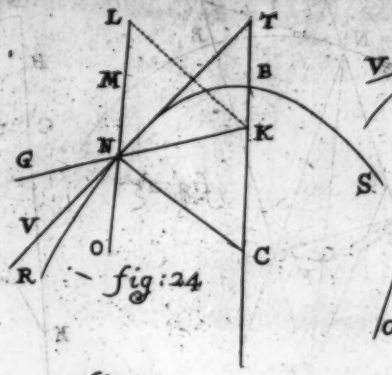


fig: 24

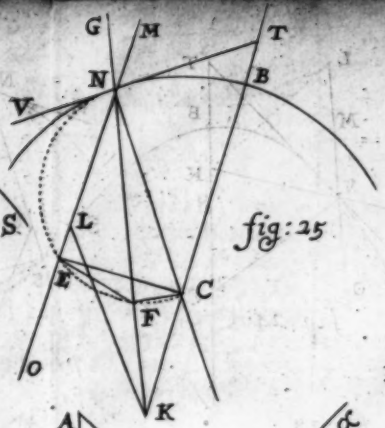


fig: 25

fig: 26

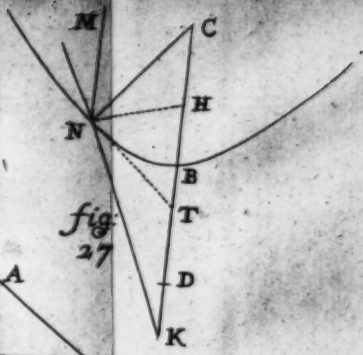


fig: 27

fig: 28

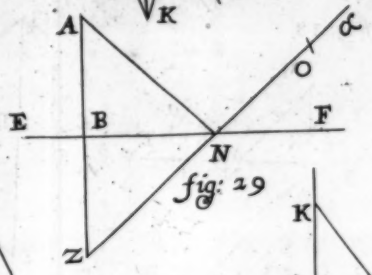


fig: 29

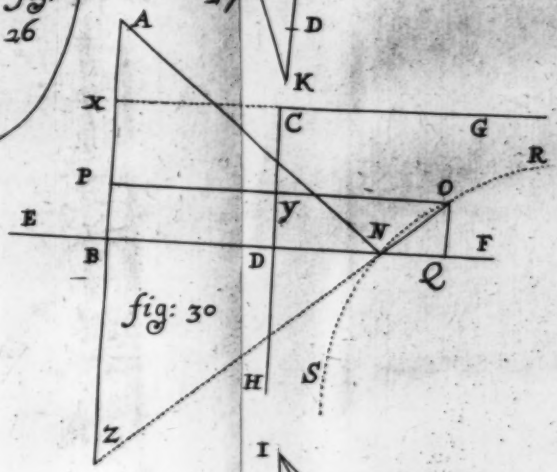


fig: 30

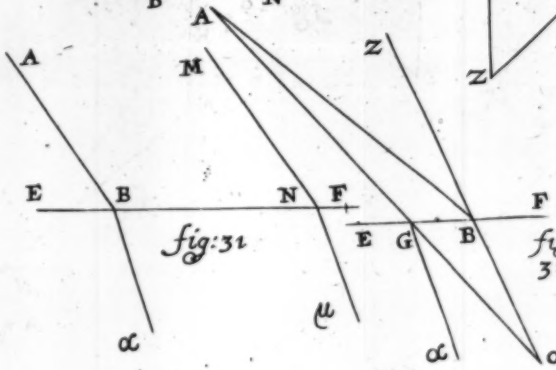


fig: 31 — fig: 32.

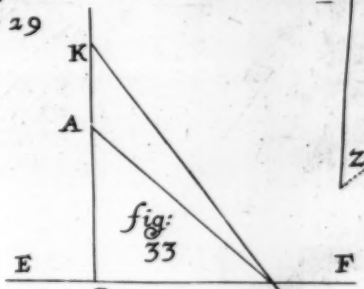


fig: 33

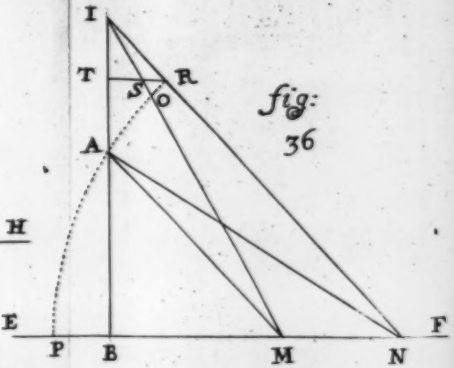


fig: 36

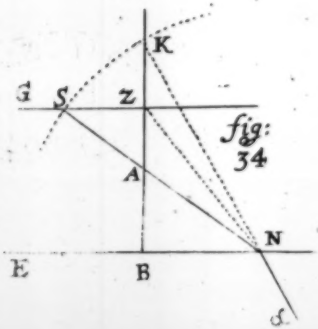


fig: 34

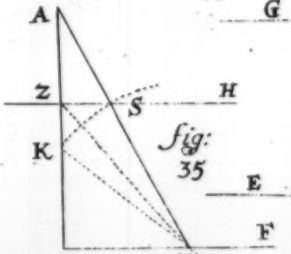


fig: 35

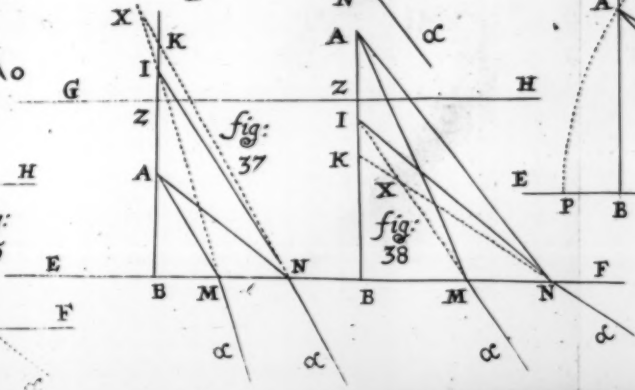


fig: 37 — fig: 38

fig. 36.

tervallum I K minus ipso K L; seu generalius efferendo, libere sumptis ipsis M N, N O, erit I K . K L = M N . N O. hoc verò non aliter, opinor, elegantius quam ex adjunctis uno, vel altero Theotemate constabit. Fig. 43.

XVI. In primo casu; sit (ut antehac) Z B . A B :: I . R; superque diametro Z B constituatur semicirculus; cui à puncto B adaptetur B D = B A; & per puncta Z, D ducta recta refringenti occurrat in Y; tum ad semiaxes B Z, B Y (centro nempe B, vertice Z) describatur Hyperbole H Z G; in hac autem sumpto quolibet puncto S ducantur S N ad A B, & S K ad E F parallelæ. Denique ducantur A N, K N α, erit K M α incidentis A N refractus. Fig. 44.

Nam ex *Hyperbola* natura est K B q − Z B q . B N q :: B Z q . B Y q :: Z D q . B D q (hoc est) :: Z B q − A B q . A B q. quare componendo K B q − Z B q + B N q . B N q :: Z B q . A B q hoc est K N q − Z B q . B N q :: Z B q . A B q. permutandóque K N q − Z B q . Z B q :: B N q . A B q rursusque componendo K N q . Z B q :: A N q . A B q. denuóque permutando K N q . A N q :: Z B q . A B q :: I q . R q. quare K N . A N :: I . R. ergo K N ipsius A N refractus erit: Q. E. D.

XVII. Hinc refractorum cum axe concursus (puta I, K, L) à se distant intervallis ordinatim applicatarum ad *Hyperbolam*, puta rectarum, B Z, M R, N S, O T; vel ipsarum O, Z I, Z K, Z L. Hæ verò (ceu passim notum, & à nobis aliquando generatim circa cunctas hujusmodi curvas ostensum est) in majori ratione crescunt, quam ipsæ B M, B N, B O; nempe Z L . Z K ⊏ L T . K S . & Z K . Z I ⊏ K S . I R. quare satis liquet propositum. Enimverò prope verticem Z ordinatarum differentiæ perquam exiguæ sunt; ut bene multorum perpendiculari A B adjacentium radiorum refracti velut è puncto Z manare videantur; utcunque circa ipsum præcipuè constipantur.

XVIII. Haud absimiliter, in secundo casu, super ipsa A B describatur semicirculus; & huic accommodetur B D = B Z; & connexa protractáque A D refringenti occurrat ad Y; tum centro B semiaxibus B Z, B Y describatur ellipsis H Z G; & in hac accepto quocunque puncto S ducantur S N ad Z B, & S K ad E F parallela; connectantur denique rectæ A N, K N; erit K N incidentis A N refractus. Etenim ex ellipsis natura est K S q . Z B q − S N q :: B Y q . B Z q :: B Y q . B D q :: B A q . A D q :: B A q . B A q − B Z q . & per con- Fig. 45.

 versam

versam rationem KSq. KSq — ZBq + SNq :: BAq. BZq. hoc est KSq. KNq — ZBq :: BAq. ZBq. quare permutando erit KSq. BAq :: KNq — ZBq. ZBq. & compositè KSq + BAq. BAq :: KNq. ZBq. hoc est ANq. BAq :: KNq. ZBq. quare rursus permutando est ANq. KNq :: BAq. ZBq :: Rq. Jq. itaque AN. KN :: R. I. unde patet KN ipsius AN refractum fore: Q. E. D.

XIX. Exhinc, ut in priore casu, patet quòd distantiæ (ZI, IK, KL) concursuum æquantur differentiis ipsarum ZB, RM, SN, TO ordinatarum ad ellipsim. Et quod ZI, ZK ⊐ IR. KS. &c differentiæ porrò dictæ circa verticem ellipsis Z admodum exiguæ sunt, adeóque propinquiorum axi radiorum refracti circa Z dense congregantur, & velut ab eo procedere videntur.

XX Ex his tandem universis colligitur quòd puncti radiantis A imago (respectu scilicet oculi centrum O habentis ut supiam in axe AB constitutum) circa punctum Z consistet. Sit enim Dδ diameter pupillæ (illa nempe quæ in plano EAFO) & per hujus extrema transeant radiorum AM, Aμ refracti IMD, Iμδ; sanè patet quòd nullius obliquioris (ceu ipsius AN, vel Aν) refractus oculum ingredi poterit; quin universi tales aliorsum digredientur, adeóque nec illi quicquam advisum attinebunt; eique nil omnino conferent efficiendo quaquam, nedum determinando. Quinimò cùm visus a solis afficiatur radiis intra spatium ZI axem intersecantibus, adeóque velut ab eo procedentibus, intra spatium ZI necessariò versabitur imago; quia verò ex his qui circa Z concurrunt oculo rectiùs incidunt, ideóque præcipuâ vi pollent; cùm & ii (uti mox ostendimus) spissiores sint, & præ cæteris confertim incedant (id quod etiam nonnihil illorum vim adauget) cùm etiam iidem faciliùs ab oculo rursus in idem punctum recolligantur (id quod posthac aliquatenus ostendemus; & interim ex eo fit verisimile, quòd res per exiguum foramen spectatæ, radiis scilicet obliquioribus exclusis, longè distinctiùs, apprehenduntur) quoniam, inquam, hæc ita se habent, iis perpensis omninò rationi consentaneum est objectum videri ceu radios projiciens à puncto Z, hoc est ejus imaginem inibi consistere Addo, quòd ob exilem pupillæ latitudinem, & propter aliquantam oculi distantiam à refringente; totum spacium ZI perquam angustum erit, & instar puncti merebitur existimari: quæ cuncta propositum abunde videntur confirmare.

Fig 46.

XXI. Accedit

XXI. Accedit tamen ei penitiùs aſtruendo etiam experientia; quâ nempe compertum habetur; quòd objectum (velut A) in aquâ ſitum, oculo (O) perpendiculariter immiſnenti, ità diſtans videtur (puta ad Z) ut ſit perpetuò A Z quadrans ipſius A B, id quod ratiociniis præcedentibus exquiſitè congruit. Etenim cum experientia docuerit in refractionibus ex aqua factis in aërem, *Sinum anguli Incidentiæ ad Sinum anguli Refracti* ſe habere circiter, ut 3 ad 4; erit juxta conſtructionem præmiſſam ipſius Z B ad A B ratio ſubſeſquitertia; ſeu hæc ad illam ut 3 ad 4. Quare nihil erat cauſæ cur hoc fretus experimento Præclariſſimus vir receptam de refractione ſententiam impugnaret, & exploderet; at potiùs ut ei promptiùs accederet, aut firmius adhæreret, expoſiti Phænomeni cauſam adeò perſpicuam, adeo neceſſariam ſuggerenti. quinimò perpendicularem ipſam (quod adeò valde vult, acriterque contendit) è ſuperiore doctrinâ quadantenus infringi, decurtarique (terminatione ſaltem refringi, tametſi non ſitu) patebit ad illam attendenti. *Iſ. Voſſ.*

XXII Habetur itaque definitus imaginis ſitus, ob oculum in axe collocatum. Succedit ut idem præſtemus oculi gratiâ extra ipſum ubicunque ſiti. Sed priùs unum eſt quod opportunè moneamus, anteà prætermiſſum; eâdem ſcilicet operâ quoad radios convergentes ſimul ac divergentes confici negotium. Erunt enim ad punctum quodvis (ceu A) tendentium radiorum refracti prorſus iidem eum illis, qui divergentibus ab A convenient, modò cæteris manentibus invariatis (refringente ſcilicet & puncto A deſignatum ſitum retinentibus) media concipiantur tranſpoſita. Nimirum, exempli cauſâ, ſi N K ſit refractus radii B N verſus A tendentis è raro in denſum; erit itidem N H ipſi K N in directum poſitus radii A N B, è raro in denſum (quæ nempe prioribus homogenea ſint) procedentis refractus. Itaq; quæ de radiis divergentibus oſtenſa ſunt, ea convergentibus, adhibito juſto moderamine, pariter adaptari poſſunt; in horum locum divergentes reſpectivè congruos ſubrogando. Quare nedum in hoc caſu, ſed in omnibus qui ſequentur, de radiis ſolummodò divergentibus inſtituemus ſermonem; eò ſubintelligentes etiam convergentes ex hac regula determinabiles referri. Quæ ſanè compendio deſerviens obſervatio, generalibus iſtis ſupra delibatis meruit intertexi; nec enim ad hanc ſolam quæ præ manibus, aſt ad omnes æquè, quaſlibet ad ſuperficies, radiorum inflectiones ſe extendit. Fig. 47.

XXIII. Adſimilem & indè conſequentem (cum paralleli à puncto proveniant

provcniant infinitè diſſito) circa radios parallelos obſervatiunculam, compendio ſervientem, etiam hîc tempeſtivum fuerit adjungere; parallelorum nempe Convexis incidentium partibus radiorum inflexi, quoad poſitionis directionem, iidem erunt cum inflexis iplorum concavis partibus incidentium; modò tranſpoſita concipiantur media. Quare parallelorum radiationes examinando nihil erit opus convexas partes à concavis diſtinguere; ſeu exinde caſus multiplicare. Res è poſthac dicendis clarior evadet. His admonitis, de tabula jam manum; & quam propoſuimus inſtituendam proximè diſquiſitionem ſequenti reſervamus.

LECT. V.

I. EO jam provecti ſumus, ut radiantis (à ſenſibiliter finita diſtantia) puncti locum apparentem inveſtigemus, illum nempe qui reſultat, è peracta ad planam ſuperficiem refractione; nec non reſpectu viſus extra radiationis axem conſtituti. Quorſum imprimis ſpectat, ut rectam determinemus lineam, in qua locus ille verſatur; tum ut ſingulare deſignemus in illa recta punctum, circa quod exquiſitè conſiſtit. Utriuſque quæſiti gratiâ conficiendum, (imo penitius excutiendum) venit hujuſmodi *Problema*:

II. *Dato puncto A, in poſitione datam rectam E F radiante, deſignandus eſt incidens, qui per alterum tranſeat datum punctum.*

Fig. 48, 49. III. Si datum punctum alterum (puta jam K) in recta A B exiſtat, ad refringentem E F perpendiculari Problema planum erit, ac ità facilè conficietur. In primo caſu (quando ſcilicet I ⊏ R) fiat A B. Y B :: √Iq — Rq. I. itemque fiat K B. T :: √Iq — Rq. R; tum centro Y intervallo T deſcriptus circulus ipſam E F ſecet in N; connectantunrque A N, K N; erit K N ∝ ipſius A N refractus.

Itidem in ſecundo caſu (cùm I ⊐ R) fiat K B. Y B :: √Rq. — Iq. R. A B. T :: √Rq — Iq. I. centroque Y intervallo T deſcribatur circulus ipſi E F occurrens in N; eritque rurſus K N ∝ ipſius

A N

A N refractus. Hæc autem è ſupra poſitis Theorematis abundè conſtant. 10 & 13 *Lect.* 4.

IV. Verum extra caſum hunc, & particulares alios nonnullos (quos hic certè nil attinet commemorare) generatim & illimitatè conceptum Problema ſolidum eſt, pluresque duabus ſolutiones admittit; id quod facilè perſpicietur concipiendo punctum datum (puta X) in primo caſu extra angulum A B F jacere (vel intra eundem, in ſecundo) quo poſito liquet è præcedentibus obtingere poſſe nonnunquam, ut duorum ad partes B F incidentium refracti concurrant ad X; quin & alterius unius ad partes B E incidentis refractum etiam per idem X tranſire quod cùm ſubinde, dico, contingere poſſit, indè certò conſequetur *Problema* ſolidum eſſe. Fig. 50.

V. Pro cujus ſolutione, primùm adnoto vix ullum *Problema* dari (præſertim è difficilioribus) quod non peculiarem lineam naturâ ſibimet appropriatam habeat, cujus deſcriptione quàm expeditè conſtruatur; & quidem ità, ut ſimul indolem ſuam prodat; poſſibilitatem, inquam, & impoſſibilitatem ſuam; determinationes, & limitationes neceſſarias; caſuum & ſolutionum varietatem apertè monſtret, & velut ob oculos repreſentet. In cujus qualis qualis obſervationis ſpecimen (alia quædam poſtmodùm exhibituri) imprimis lineam proponemus hujuſce Problematis executioni peculiariter accommodatam, hoc modo promptè deſcribendam.

VI. Per radians punctum A ducatur A R S refringenti parallela; eidémque perpendicularis A B utrinque protendatur indefinitè. Item per datum alterum punctum X protendatur X R ad A B parallela: Quinetiam facto A S. A R :: I. R; per S extendatur S U ad A B parallela. Quibus ſtantibus per A quotcunque tranſeant rectæ ſecantes ipſam S U punctis H; & centro X, intervallis ipſas A H exæquantibus, deſcribantur circuli ſecantes perpendicularem A B punctis K; demum per X K ductæ lineæ cum ipſis H A conveniant in N. Per ejuſmodi quæcunque puncta tranſibit propoſito noſtro deſerviens linea (A N N) quam ſuſcepimus deſcribendam; cujuſce nimirum cum refringente F F interſectiones ipſiſſima ſunt incidentiæ puncta, quæ indagamus (hæ autem ad unas rectæ A B partes (veluti ad F) aliquando duæ erunt; ſubinde tantùm una, cùm E F ſic effectam curvam tangit; quandoque nulla, cùm E F ultra tangentem dictam jacet; ad alteras ſaltem una erit; quæ ſatis attendenti manifeſta futura ſubnoto tantùm. Fig. 51.

tùm & levi pede prætereo; quoniam aliunde mox apparitura) ſit, inquam, ejuſmodi quælibet interſectio N; dico fore XN, ipſius AN refractum. Etenim eſt I. R :: AH. AT. hoc eſt (quoniam AH, KX ſunt ex conſtructione pares) I. R :: KX. AT :: NK. NA. unde manifeſtum, è præmonſtratis, eſt propoſitum.

Fig. 51.

VII. Veruntamen hujuſmodi conſtructiones *Geometrarum* uſus aut non libenter admittit, aut alias ſaltem exigit per lineas vulgo notas, atque receptas; itaque conſuetudini morem gerentes rem aliter conficiemus; huc utique faciens ſequens *Problema Lemmaticum* prætermittentes: Dato angulo recto XPF; punctóque quovis Y; per hoc rectam duce. e dati anguli cruribus occurrentem, ſic ut ab iis interceptа ſit æqualis datæ rectæ T. || Expeditiſſimè quidem perficitur hoc ope *Conchoidis* alicujus polo Y deſcriptæ; ſed enim quoniam & iſte modus hand ità Geometricus cenſetur; adhuc iiſdem Geometris obſequentes ità propoſitum exequemur. Ducatur YB ad PF perpendicularis; & *Aſymptotis* PX, PB ducatur *Hyperbola* per Y tranſiens (ſi quidem punctum Y exiſtat extra angulum datum, aut iſtius oppoſita (ſc. punctum Y ſit intra dictum angulum) tum centro Y intervallo datam T æquante deſcriptus circulus *Hyperbolam* inteerſecet in K; & à K demittatur KL ad BP perpendicularis; accipiatur autem BN = PL; & per NY trajiciatur recta NG. dico factum; vel eſſe NG parem datæ T. || Nam (ductâ YH ad PB parallelâ) ex *Hyperbolæ* proprietate eſt PL × LK = PB × BY. adeóque cùm ſit ex conſtructione BN = PL; erit BN × LK :: PB × BY. adeóque BN. BY :: PB. LK. eſt autem BN. BY :: DY. DG. ergo eſt PB. LK :: DY. DG. quare cùm ſit PB = DY. erit LK = DG. adeóque (pares LH, DP addendo, vel ſubtrahendo) eſt KH = GP. quinetiam eſt YH = LB = PN (communem nempe PB, vel LN addendo) Ergò patet fore YK (vel T) æqualem ipſi GN: Q. E. F.

Fig. 52.

VIII. Notandum eſt autem in caſu, quando punctum Y intra datum angulum XPF exiſtit, quòd circulus ille centro Y deſcriptus ſubinde deſignatam hyperbolem binis punctis ſecabit (quod enim pluribus haud quoquam ſecabit univerſim haud ità pridem circa tales ad eadem convexas curvas oſtendimus) quo caſu patet duas obvenire propoſiti ſolutiones, aliquando rurſus ille dictus circulus *Hyperbolen* continget; & tum una tantùm per Y duci poterit recta, datam T adæquans; illa ſcilicet omnium quæ per Y dato angulo interſeri poſſunt minima. Quod ſi circulus Hyperbolæ non occurrat, *Problema* prorſus ἀδιόριστον erit.

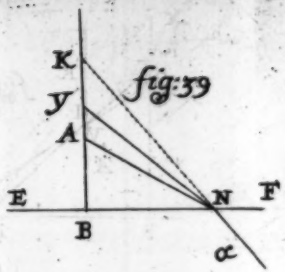


fig: 39

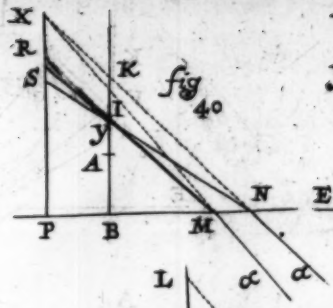


fig 40

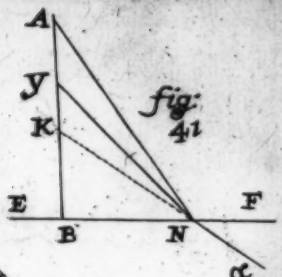


fig: 41

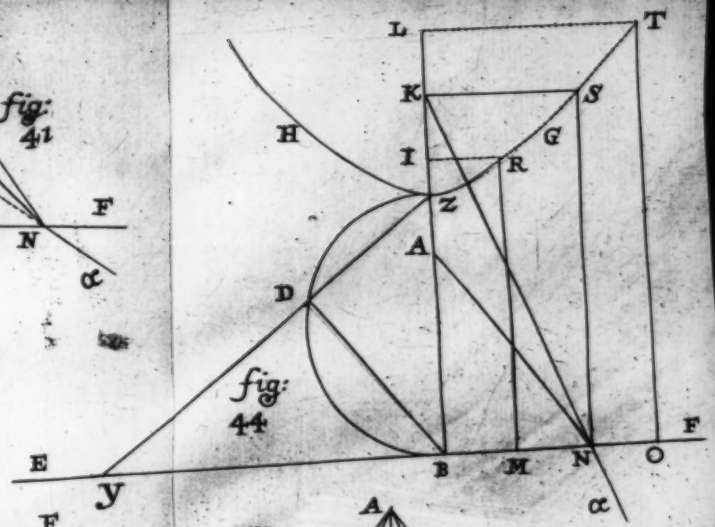


fig: 44

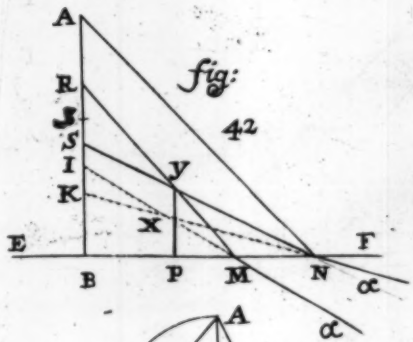


fig: 42

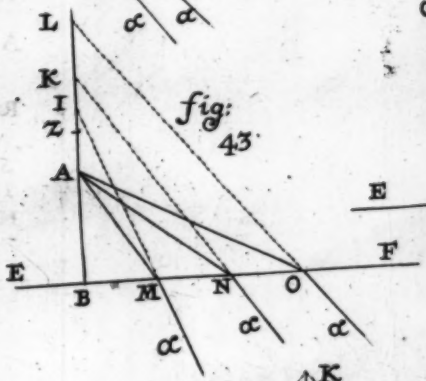


fig: 43

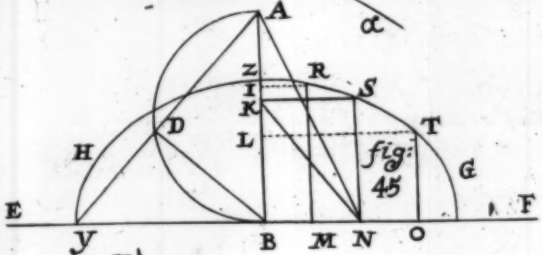


fig: 45

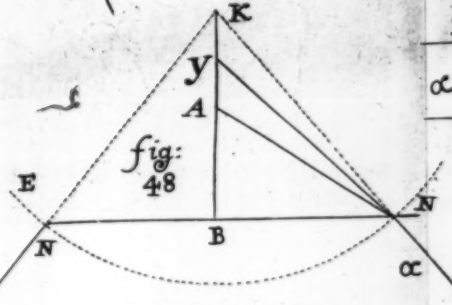


fig: 48

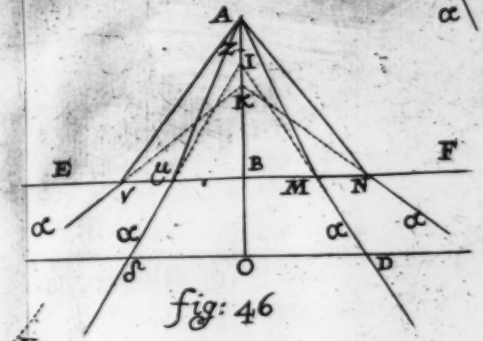


fig: 46

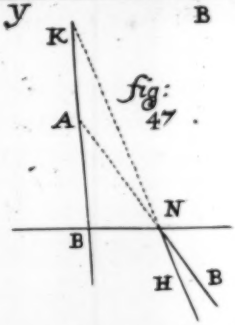


fig: 47

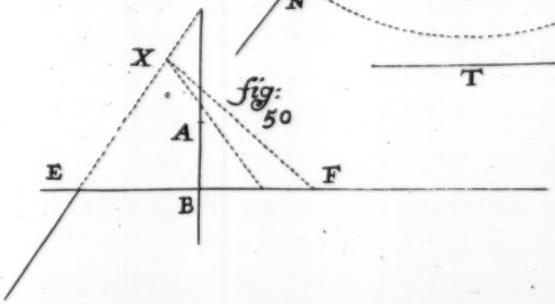


fig: 50

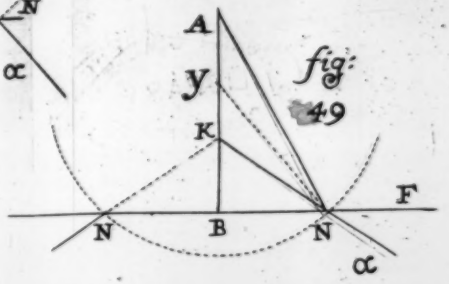


fig: 49

Fig. 51.

Fig. 52.

erit. || Sin punctum Y extra datum angulum exiſtat, evidens eſt tantùm uno modo problemati ſatisfactum iri; quódque per alteram interſectionem, & Y, ducta recta ad angulum pertinet dato verticalem. hæc, inquam, tantillùm attendenti manifeſtè conſtabunt; nihil ut ſit opus hic plura verba conſumere. verum ut in horum caſuum primo conſtet (id quod pro ſequentibus ex uſu erit cognoſcere) quando dictus circulus *hyperbolem* còntingit; ſeu quando tantùm una per Y recta quantitatis ejuſdem interſeri poſſit, hoc adnectemus *Theorema.*

IX. Si à puncto quovis Y intra rectum angulum XPF exiſtente demittantur ad ejuſdem anguli latera perpendiculares YB, YD; ac inter YB, YD proportione mediæ ſint rectæ BN, GD; per puncta N, Y, G tranſibit recta cunctarum minima, quæ per Y ductæ angulum XPF ſubtendere poſſunt. Fig. 54.

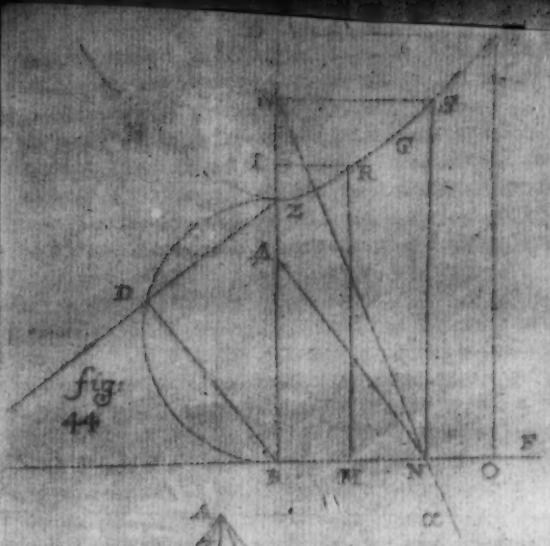
Quòd NYG ſit una recta patet, quoniam eſt YB. BN::GD. DY (ex conſtructione nimirum) porrò per Y tranſeat alia quæcunque recta LYM; & NH ad GN, MH ad PF perpendiculares concurrant in H. item HA ad NG parallela ducatur; & GS ad PF; denuóque connectatur GH. Jam patet triangula GDY, YBN, HMN, HMR ſimilia fore; quódque propterea eſt MN. MR:: MNq. MHq::DGq. YDq. item (ob BN, DG, YD ÷÷) eſt BN. YD::DGq. YDq. hoc eſt YN. YG (vel MN. GS) ::DGq. YDq. ergò eſt MN. MR::MN. GS. adeóque MR = GS. itaque major eſt GS ipsâ MT; abeóque rectæ GH, LM protractæ concurrent; puta ad Z. ergò LM. GH::LZ. GZ. verùm propter angulum LGH recto P majorem, eſt LZ ⊏ GZ. quare LM ⊏ GH. aſt ob angulum rectum GNH eſt GH ⊏ GN. quare magis eſt LM ⊏ GN. eodémque modo quævis per Y ducta major oſtendetur ipsâ GN: Q. E. D.

X. Hinc etiam ſi GN ſit in ratione YB ad YN quarta proportionalis; erit GN minima. nam indè conſequetur fore YB, BN, GD, YD ÷÷. Etenim erit YNq. YBq::GN. YN. & dividendo BNq. YBq::GY. YN::DY. BN. ac indè YBq × DY = BNcub; vel $DY = \frac{BNcub}{YBq}$. itáque DY eſt quarta proportionalis in ratione YB ad BN.

XI. Subnotari poteſt autem, quòd minimæ GN propiores remotioribus

Fig. 51.

Fig. 52.



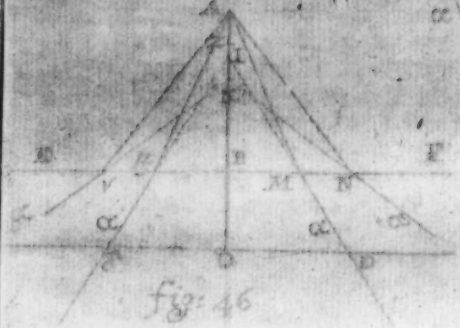


fig: 46

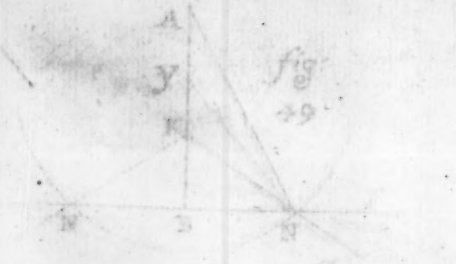


fig:
49

erit. || Sin punctum Y extra datum angulum existat, evidens est tantùm uno modo problemati satisfactum iri; quódque per alteram intersectionem, & Y, ducta recta ad angulum pertinet dato verticalem. Hæc, inquam, tantillùm attendenti manifestè constabunt; nihil ut sit opus hic plura verba consumere. verùm ut in horum casuum primo constet (id quod pro sequentibus ex usu erit cognoscere) quando dictus circulus *hyperbolæus* contingit, seu quando tantùm una per Y recta quantitatis ejusdem interseri possit, hoc adnectemus *Theorema*.

IX. Si à puncto quovis Y intra rectum angulum XPF existente demittantur ad ejusdem anguli latera perpendiculares YB, YD; ac inter YB, YD proportione mediæ sint rectæ BN, GD; per puncta N, Y, G transibit recta cunctarum minima, quæ per Y ductæ angulum XPF subtendere possunt. Fig. 54.

Quòd NYG sit una recta patet, quoniam est YB. BN :: GD. DY (ex constructione nimirum) porrò per Y transeat alia quæcunque recta LYM, & NH ad GN, MH ad PF perpendiculares concurrant in H. item HA ad NG parallela ducatur; & GS ad PF; denuóque connectatur GH. Jam patet triangula GDY, YBN, HMN, HMR similia fore; quódque propterea est MN. MR :: MNq. MHq :: DGq. YDq. item (ob BN, DG, YD ∺) est BN. YD :: DGq. YDq. hoc est YN. YG (vel MN. GS) :: DGq. YDq. ergò est MN. MR :: MN. GS. adeóque MR = GS. itaque major est GS ipsâ MT; abeóque rectæ GH, LM protractæ concurrent; puta ad Z. ergò LM. GH :: LZ. GZ. verùm propter angulum LGH recto P majorem, est LZ ⊏ GZ. quare LM ⊏ GH. ast ob angulum rectum GNH est GH ⊏ GN. quare magis est LM ⊏ GN. eodémque modo quævis per Y ducta major ostendetur ipsâ GN: Q. E. D.

X. Hinc etiam si GN sit in ratione YB ad YN quarta proportionalis; erit GN minima. nam indè consequetur fore YB, BN, GD, YD ∺. Etenim erit YNq. YBq :: GN. YN. & dividendo BNq. YBq :: GY. YN :: DY. BN. ac indè YBq × DY = BNcub; vel $DY = \frac{BNcub}{YBq}$. itáque DY est quarta proportionalis in ratione YB ad BN.

XI. Subnotari potest autem, quòd minimæ GN propiores remô-

 tioribus

[illegible] minores [illegible]. & quod [illegible] ob [illegible] [illegible] possint, ad [illegible] [illegible] [illegible]

jam allegatis similis, adsit ... & designetur quilibet refractus RN, ducatur tertia proportionalis ... BN, ut sit ad hanc proportionem quarta BP, & per punctum P ducatur recta PZ ad AB parallela, refracto KN occurrens in Z, dico nullum alium refractum per Z transire. Nam si fieri potest transeat alius ZR, & per Y traducantur rectæ NYG, RYS, è præmonstratis apparet quod sit RS = NG. item è præmissis manifestum est quod RS ⊏ NG, quæ repugnant. Fig. 57, 58. * 12. Lib. 4. * 9 hujus Lib.

XVI. Non dispari ratione, quoad casum secundum, designetur quilibet refractus KN, & sint KB. GB :: √Rq — Iq. R, tum adnexâ GN, ad ipsas NG, GB sumatur tertia proportionalis V, & fiat NG. V :: BN. NP, & per punctum P ducatur PY ad BA parallela refractum NK decussans in Z; dico nullum alium refractum per ipsum Z meare. Nam, si neges, transeat alius ZR, & per Y trajiciatur RYS; & quoniam ZP. YP :: KB. GB :: √Rq — Iq. R. ex * antecedentis apparet fore RS = NG. quinetiam ob NGq. GBq :: NG. V :: BN. NP. erit dividendo NBq. GBq :: BP. NP. hoc est NPq. PYq :: BP. NP, inde facile deducitur esse BP quartam proportionalem in ratione YP ad PN, consequenterque fore RS minimâ NG majorem. quod adversatur ostensis. itaque potius per Z nullus alius transit refractus: Q. E. D. * 14. Lib. 4.

XVI. Præterea, si refractum NKZ intersecet alius quilibet MI, ad rectiorem pertinens incidentem (hoc est ut incidentiæ punctum M inter B, & N jaceat) intersectio X solitario puncto Z citerior erit (seu perpendiculari KB propinquior). Nam ab X demittatur perpendicularis XQ, ipsam NG secans in γ, & (in primo casu) per M, Y traducatur recta MYH. ergò MH = Nγ. quare minima earum quæ per Y angulo XQF interseri possunt inter puncta M, N cadet (uti nuper admonitum, & adstructum). puta ad φ. ergò quum sit BP quarta proportionalis in ratione YB ad BN, & BQ quarta proportionalis in ratione YB ad Bφ, erit PB ⊏ QB, adeòque recta XQ rectis ZP, KB interjacet: Q. E. D. Fig. 59, 60.

In secundo casu, per γ trajiciatur recta MγH. ergò cum sit QX. Qγ :: PZ. PY :: √Rq — Iq. R. erit HM = GN. ergò minima per γ ducibilium angulo ABF intercipienda punctis M, N intercidet, puta ad φ. quare QB quarta proportionalis erit in ratione γQ ad Qφ; & est γQ. Qφ ⊏ (γQ. QN.) :: YP. PN. &

simplicibus triplicatæ proportionis rationum. eli. ; Q. QB ⊂ YP. PB. & hinc æqualia rectangula comparando eli. QN. ; Q. ; Q. QB ⊂ PN. YP. = YP. PB. hoc eli. QN. QB ⊂ PN. PB. componendoque BN. QB ⊂ BN. PB. ergo QB ⊃ PB. unde rursus liquet rectam XQ ipsis AB ; ZP interjacere : Q. E. D.

XVII. Consimili prorsus argumentatione constabit obliquiorum incidentium refractos ultra punctum Z ipsam KN intersecare.

XVIII. Quinimò rursus exteriùs apparet non nisi binos refractos in eodem puncto convenire.

XIX. Addo eum ipso KN concurrentes refractos circa punctum Z conglomerari, præsertim illos, qui ad partes F (obliquius) incidentes pertinent.

Fig. 61. Nam accipiantur, exempli causâ, sibi pares NS, ST ; & sit BP quarta proportionalis in ratione YB ad BN ; & BQ quarta proportionalis in ratione YB ad BS ; & BR itidem quarta talis in ratione YB ad BT ; & à punctis P, Q, R erectæ perpendiculares ipsam NKZ secent in Z, X, & V. patet (è mox ostensis) omnium spatio NS incidentium refractos cum NK concurrere intra ZX ; nec non omnes ipsi ST incidentium refractos intra XV cum eodem convenire. porrò rectæ BP, BQ, BR se habent invicem ut *Cubi* rectarum BN, BS, BT, (vel sunt in ipsarum BN, BS, BT *ratione triplicata* : nam BP. YB :: BN cub. BY cub. & YB. BQ :: YB cub. BS cub. adeòque ex æquo BP. BQ :: BN cub. BS cub. & consimili ratione BP. BR :: BN cub. BT cub.) undè facilè monstrabitur esse PQ multo minorem quàm QR ; vel ZX quam XV (verbis parco multis in re satis manifesta) : quare dicti refracti circa punctum Z spissiùs ipsum NK decussabunt.

XX. Ex his demùm conficitur omnibus bene trutinatis, oculo (O) centrum habenti in refracto NK ubique constituto, puncti A imaginem ad ipsum conditione præditum toties insinuatâ punctum Z consistere. Sit enim CD pupillæ (in plano ABC jacens) *Diameter* ; *axi Optico* KN perpendicularis ; & per ejus extrema C, D transeant refracti IM. LR ipsi KN occurrentes punctis X, V. ex ostensis patet omnium intra spatium MN incidentium radiorum refractos intra terminos ZX principalem refractum intersecare ; neque non omnes ad

spatium

spatium M R pertinentes intra Z V eidem occurrere; quinetiam nullius citra punctum M, vel ultra R incidentis refractum (seu nullum citra X, vel ultra V cùm ipso K N concurrentem) oculum ingredi posse. quare saltem imago consistet intra terminos V X; siquidem aliunde qui videntur emanare *Radii* nihil quicquam ad visionem conferent, aut ad eam ullatenus pertinebunt, cæterum quoniam ab V X procedentium (apparenter, inquam, procedentium) recissimi, vel axi propriores velut ab ipso Z procedere videntur (seu à loco qui circa ipsum) ipsique proinde validiùs afficiunt oculum, & ab eo facilius adunari, recolligique possunt; cùm & ii præ cæteris confertim irruant (illi saltem qui ad partes N R,) quia denique propter angustiam pupillæ spatium V X haud ita magnum existit; cùm, inquam, hæc ita se habeant, omnino rationi consentaneum est, dictam imaginem circa punctum Z versari; nec alias arbitror excogitari posse verisimiles causas, quæ situm ejus determinent. *Alhazenus* quidem, & post eum pleraque cohors *Opticorum* ipsam ad punctum K, ubi principalis refractus perpendicularem A B decussat, constituit; verum haud ullam rei natura causam suggerit, cur inibi statuatur. unicus enim (nisi saltem pupilla perpendicularem ipsam A B comprehendat, oculusque valdè sit ei propinquus) per illud punctum means radius, afficiendo visui minimè suffecturus, ingredietur oculum; eadémque punctorum intra K X ipsi K adjacentium est ratio; nullus siquidem ea permeans refractus oculum attingit; nil itaque subest causæ cur punctum A circa K appareat. quin adhuc à vero magis aberrat, *qui faciens N H æqualem ipsi N A puncto H affigit imaginem (huc, opinior, impulsus quia taliter in reflectione se rem habere perspexit; cui similis causa ni fallor *Euclidem*, *Alhazenum*, *Stevinum* (quanquam ipsos in diversum euntes) horúmque sequaces, in *Catoptricis*, in errorem egit; prout usu non raro venit *analogias haud bene fundatas*, indistinctéque perceptas mortalibus imponere; sed utcunque quod dixi magis ista sententia abhorret à ratione.) nullus enim in primo casu refractorum concursus fit infra angulum ABF; nullus extra illum in secundo; proindèque fortiùs hanc quæ objecimus, quàm priorem *Alhazeni* percellunt sententiam. addo quòd simul utraque, sed præsertim hæc, multiplici refragatur experientiæ, multiplicique ratiocinio; pariter enim se res habere debuit in *Catoptricis*, ut & in *Dioptricis circularibus*; id quòd manifestè, longéque secus tam ab experientiâ, quàm à ratione compertum est. quin hanc abunde subvertit ac pessum dat quod supra proposuimus experimentum, nemini non obvium; quòd nempe punctum A, oculo in ipso perpendicu-

Fig. 6.

D. Hobbius.

lari

lari AB constituto, non in suo loco (quod juxta dictam sententiam oportuit) sed pro mediorum diversitate, (perquam sensibili intervallo) citerius adspectatur, aut ulterius. Sed effatum hoc nostrum (eique quoad reliquos in Catoptricis, Dioptricisque casus similes consona) tametsi novitium, & nullâ quod sciam hactenus auctoritate fultum, cùm forsan expositum dilucidius, tum penitissimè dabimus confirmatum, si quando nos de imaginum natura, locóque speciatim evenerit differtare. Mihi saltem videtur hæc Scientia quoad hanc partem suam, certè palmariam (uti reperitur hactenus tractata) perquam mutila, nè dicam admodum vitiosa; nec aliò ferè collimamus quàm ut aliquousque suppleamus eam, ac sanemus.

Fig. 63. XXI. Proximè dictis confirmandis idoneum haud ille pidum experimentum interseremus. Aquæ Superficiei RS (stagnanti, & immotæ desuper immineat objectum HG; ejus autem punctum G radat perpendiculum EF (filum puta candidum, aut stylus, cui plumbum F appenditur) videbitur itaque punctum G (oculo O) ex reflectione in ipsâ perpendiculari GB velut ad γ; at perpendiculi punctum F (admodum notabili distantiâ) citra lineam Bγ aspicitur (velut ad φ) id quod ex sententia nostra factum oportuit; & *Alhazeni*, sequaciúmque doctrinam liquidò destruit.

XXII. Subjicio tandem ex his comparere modum genuinam refractariam quam vocant (per quam nempe recta linea repræsentatur in aquæ fundo conspicua) lineam designandi; cujus loco complúres (utique non eandem omnes, sed aliam alii) Chimæram inani sunt operâ prosequuti; de quâ *Carteſius* ipse percontanti *Merſenno* sic respondit: "Non potest facilè determinari qualem figuram linea visa "in fundo aquæ sit habitura; neque enim certus est aliquis ima- "ginis locus in reflexis aut refractis, quemadmodum sibi vulgò per- "suaserunt Optici. Imò verò (tanti viri pace) cùm speciale quodvis objectum (per ejusdem generis & eodem modo terminatum medium aspectabile) similem constanter exhibeat speciem sui, simili situ dispositam, simili præditam figurâ; non video quin ex parte rei certum imago locum sortiatur; cujus certè (quoad illum qui præ manibus est casum) quotcunque puncta non difficilè poterunt è præcedentibus determinari. quinimò nullius non. ex hujusmodi planam ad superficiem refractione subnascentis phænomeni (quoad ejus intelligo figuram) causa verè, ni fallor, hinc & promptè possit assignari. verùm hæc circa planas superficies dicta sufficient; ad curvas nos proximè conferemus.||

Tom. II. Epist. 73.

Lect. VI.

Lect. VI.

I. Absolutis iis, quæ radiis accidunt ad planam ſuperficiem inflexis (obſervatu quæ videbantur non indigna, cumque principiis noſtris cohærentia; quæ denuò viam ſternebant, aut methodum aperiebant ſequentibus) ad curvas jam gradum promovemus; circa quas equidem cogitâram communia quædam delibare; verùm excuſſâ re, tam exilem illam & abſtractam deprehendo, ſatius ut exiſtimem actutùm ad particularia deſcendere. curvarum utique principem, & ad praxes Opticas longè paratiſſimam, Superficiem Sphæricam aggrediar è veſtigio. pro qua tamen, ob cauſas pridem aſſignatas, circulos ſubrogabo per oculi Sphæræque centra, pérque ſingula radiantia puncta trajectos. & quoad hos *Catoptrica* primò, *Dioptrica* poſtmodum exequemur. Ad illa.

II. Præſternemus autem λημμάτιον unum vel alterum; hoc imprimìs: Incidentium circulo radiorum obliquior eſt, qui magis à centro diſtat; vel qui minorem arcum (ſubſemicircularem) ſubtendit. ſcilicet obliquiùs incidit recta QRS, quàm recta MNP. Nam à centro C ducantur CN, CP; & CR; CS. & quoniam angulus RCS angulo NCP (hypotheſi nimirum inſiſtendo) minor eſt; patet reliquos CRS, CSR reliquos CN, P, CPN (cùm junctim, tum ſingulum ſingulo) majores eſſe. Cùm itaque Semidiametri CR, CN, circumferentiæ perpendiculares ſint; omninò liquet propoſitum. Fig. 62.

III. *Dato radio MN ad circulum incidenti congruum reflexum reſignare.* Fig. 63.

Variis modis huc facilè peragitur; quorum nunc unum adhibere, tunc alium ex uſu ſit. nos unum aut alterum ex expeditoribus attingemus. i. Incidens MN protrahatur ut circulum denuo ſecet in P.; & ſumatur arcus Nσ = NP; erit connexa σNH ipſius MNP reflexus. nam à centro C connexâ CN, manifeſtum eſt angulum CNσ,

CN ϖ, angulo CNP æquari . z 2. Accepto quovis in NM puncto (puta M) centro C per M describatur circulus MQH; item centro N per M describatur circulus MRH, qui priorem MQH secet in H; erit HN ϖ reflexus ipsius MNP. Etenim connexis CM, CH; & NM, NH, ex constructione liquet triangula CMN, CHN, invicem æquilatera fore; proindeque angulos CNM, CNH (& indè reliquos MNR, HNR) æquari 3. protensâ CNR, à quovis in MN puncto, puta M ducatur MG ad CR perpendicularis, & in hac producta sumatur GH = GM; erit conjuncta HN ϖ iterum reflexus. Nam connexis NH, NM patet angulos GNM, GNH æquari. verum hi modi sufficiunt huic conficiendo perfacili negotio.

Fig. 63.

IV. Nocetur si fuerit HNP reflexus ipsius MNP fore N ϖ = NP.

V. Dispiciamus jam primò quid ex hujusmodi reflectione contingat puncto ab infinitâ quo ad sensum distantiâ radianti, seu parallelos projicienti radios. quorsum, per circuli reflectentis centrum C protendatur indefinitè recta ABC (hoc autem in sequentibus evitandæ repetitioni perpetuò factum intelligatur; quin ejusmodi recta nominetur axis; hic *Speculi*, posteà *Diaphani*) bisecetur autem Semidiameter CB in Z; & per Z transeat recta ZY ad CB perpendicularis, indefinitéque protensa; tum quilibet incidat axi parallelus radius MNP ad N; (convexo circuli nil refert, an cavo; nam in utroque casu reflexus quoad directionem idem erit; vel ejus qui in hoc, iste qui in illo productus erit) connexáque CN ipsam ZY intersecet in V; fiátque CK = CV; ducatúrque NK; erit NK ipsius MN reflexus (vel reflexi productus) Nam ducatur NQ ad CB perpendicularis, & connectatur CP. éstque CZ.CK :: (CZ.CV ::) CQ. CN. quapropter antecedentes duplicando CN.CK :: PN.CN. item angulus KCN æquatur alterno CNP. ergò triangula CKN, NCP similia sunt; adeoque KN = KC. igitur è suprà generatim ostensis patet fore KN, ipsius MN reflexum.

VI. Hinc particularis emergit methodus hujusmodi quotcunque reflexos quàm expeditissime designandi; quin & ipsorum erga se rationes ac respectus; nec non pleraque primaria *Symptomata* facilè dilucescunt; corollariis nempe subjectis comprehensa.

VII. 1. Patet punctum Z, Semidiametrum CB bisecans, esse metam

metam infra quam nullus reflexus axem ſecat (vel perpendicularis iqſius reflexum BZ ad Z terminari). quia ſemper Cv ⊏ CZ, adeóque CK ⊏ CZ.

VIII. 2. Patet eſſe KN = KC.

3. Patet fore PN (2CQ), CN, CK ÷÷.

IX. 4. Ductâ tangente BT, productâque CNE, patet ſecantem CE diſtantiæ CK duplam eſſe; & EN = 2KZ.

X. 5. Manifeſtum eſt incidentis ad F (hoc eſt ad diſtantiam 60 graduum à vertice) reflexum per verticem B tranſire; proindéque reflexos omnium intra BF incidentium axem intra ſpacium BZ decuſſare; ſed omnes *extra* BF reflexos ultra B cum eo convenire. Fig. 64.

XI. 6. Perſpicuum eſt duorum hujuſmodi quorumvis ad eaſdem axis partes incidentium (ut ipſorum MNP, QRS) reflexos (ut GNK, HRL,) productos ſe prius decuſſare, quàm axem. Nam, ductis CR, CN, eſt Cr ⊏ Cv, adeóque CL ⊏ CK. unde neceſſariò rectæ NK, RL, ſe decuſſabunt, puta ad X. Fig. 65.

XII. Hinc ipſi convexis partibus incidentium reflexi, NG, RH, antrorſum procurrentes divergunt; adeóque nunquam uno plures idem oculi centrum permeant. unde ſpeculum convexum unicam longinqui radiantis imaginem reddit.

XIII. 7. Notetur autem angulum GXR (vel KXL) à duobus reflexis comprehenſum æquare duplum angulum NCR (hoc eſt duplum exceſſum angulorum incidentiæ). Nam ang. KXL = ang. ALR — ang. AKN = 2 ang. ACR — 2 ang. ACN = 2 ang. NCR.

XIV. Pro Sequentibus hujuſmodi *Lemma* proponemus: In triangulo quopiam ABC recta AD biſecet angulum BAC; dico fore AB + AC ⊏ 2AD. Fig. 66.

In *Iſoſcele* res clara eſt; in alio proinde ſit AC ⊏ AB; centróque A per B ducatur circulus BXY ſecans ipſam AD in X, & AC in Y. Subtenſa BX ducatur, ipſamque AC ſecet in V; fiátque VT ad AD parallela. denuo ſubtenſa XY connectatur. Et quoniam ang. XVC major eſt angulo XYV, vel angulo BXD, vel ipſo BVT,

BVT, patet rectam VT angulum XVC secare. item ob angulum XYV obtusum, est XV ⊏ XY = BX. ergo BV ⊏ 2 BX; & VT ⊏ 2 XD. Verùm ang. VTC (major ipso TVB, vel ipso DXB) est obtusus; adeóque VC ⊏ VT; itaque magis YC ⊏ 2 XD. ergò AB + AY + YC ⊏ 2 AX + 2 XD. hoc est AB + AC ⊏ 2 AD: Q.E.D.

XV. Quò paralleli radii rectius (vel axi propinquius) incidunt, eò reflexorum concursus ad axem sibi viciniores sunt.

Fig. 67. Nempe sumantur utcunque pares arcus NR, RX; & incidentium MN, QR, VX reflexi NK, RL, XM cum axe conveniant punctis K, L, M; erit ML ⊏ LK. Nam connexæ CN, CR, CX rectæ ZY occurrant punctis ν, ρ, ξ. Est itaque (juxta *Lemma* præcedens) Cξ + Cν ⊏ 2 Cρ; hoc est, CM + CK ⊏ 2 CL. quare CM — CL ⊏ CL — CK; hoc est ML ⊏ LK: Q.E.D.

XVI. Exhinc patet axi propinquam lucem ab hujusmodi reflectione magis magisque constipari, maximè circa punctum Z, ubi perpendicularis ipsius quasi reflexus terminatur. unde potissima constat ratio, quare concavis à speculis ad solem expositis circa punctum Z *Ignis* accenditur; enimverò condensatior, inque spacium arctius quasi compressa lux validiorem exerit vim, ac efficaciam.

XVII. Quinetiam ex his consectatur, longinqui puncti imaginem oculo in axe constituta circa punctum Z consistere. Fig. 68. Sit, inquam, BCO axis Opticus; oculique diameter Dδ (in plana nempe circuli propositi sita) hujus autem extrema permeent reflexi NKD, VKδ (ad incidentes MNP, μπσ pertinentes). jam abunde manifestum est imaginem conspicuam intra KZ spatium versari. Nam alterius cujusvis hinc, vel indè cadentis reflexus (seu ipsius RS, vel ϛσ) oculum omnino transgredietur, adeóque nihil quicquam ad visionem ipsam, vel ad ejus quemcunque modum determinandum conferet; id autem omne meritò tribuetur radiorum intra peripheriam NV incidentium reflexis; qui scilicet oculum ingredientes suo quisque modo visum aliquatenus afficiant. quoniam tamen ex his, qui propiores axi rectius incidunt oculo, magisque pollent idcircò; nec non iidem propterea facilius ad unum in oculo punctum recolliguntur; præ cæteris etiam illi catervatim ingruunt; rationi consonum est isthic præsertim imaginem consistere; siquidem velut ab eo plures, ac efficacissimi radii videbuntur emanare. Subjicio, propter admodum exiguam pupillæ

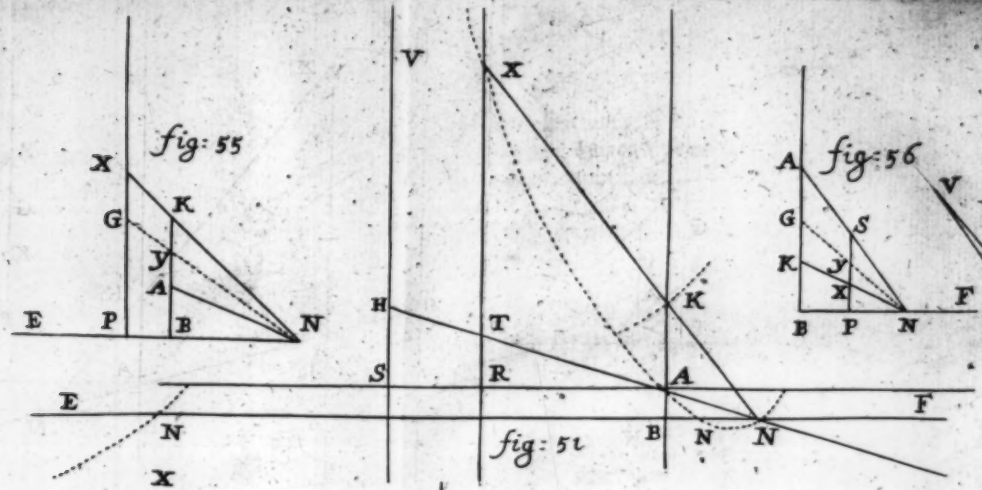
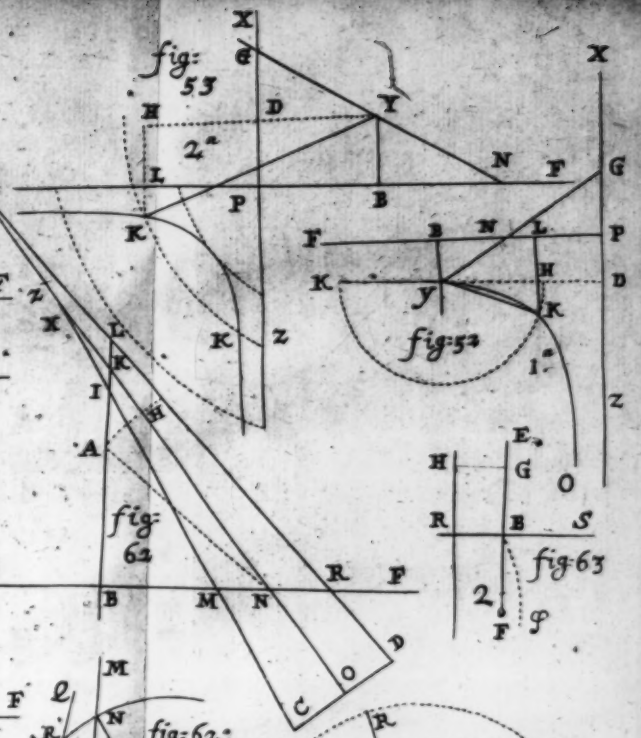


fig: 51



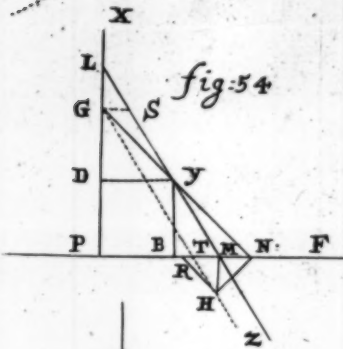


fig: 54

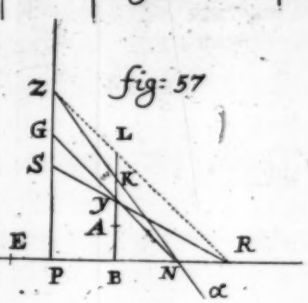


fig: 57

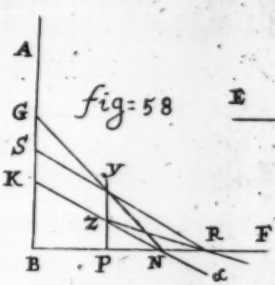


fig: 58

fig: 63

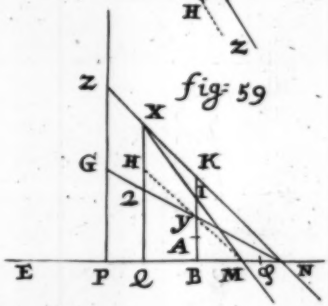


fig: 59

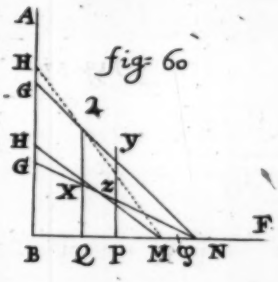


fig: 60

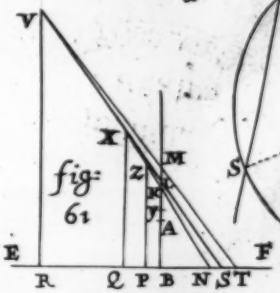


fig: 61

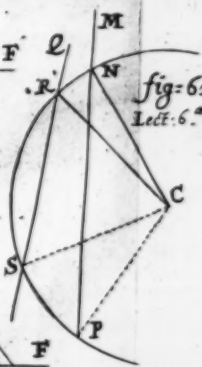


fig: 62.
Lect: 6ª

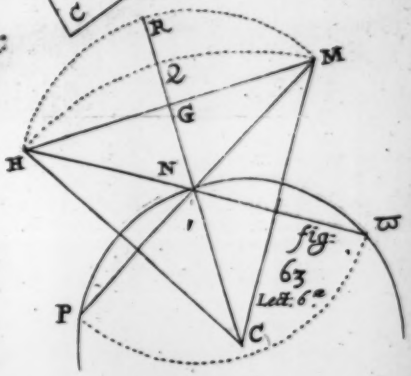


fig: 63
Lect: 6ª

Fig. 67.

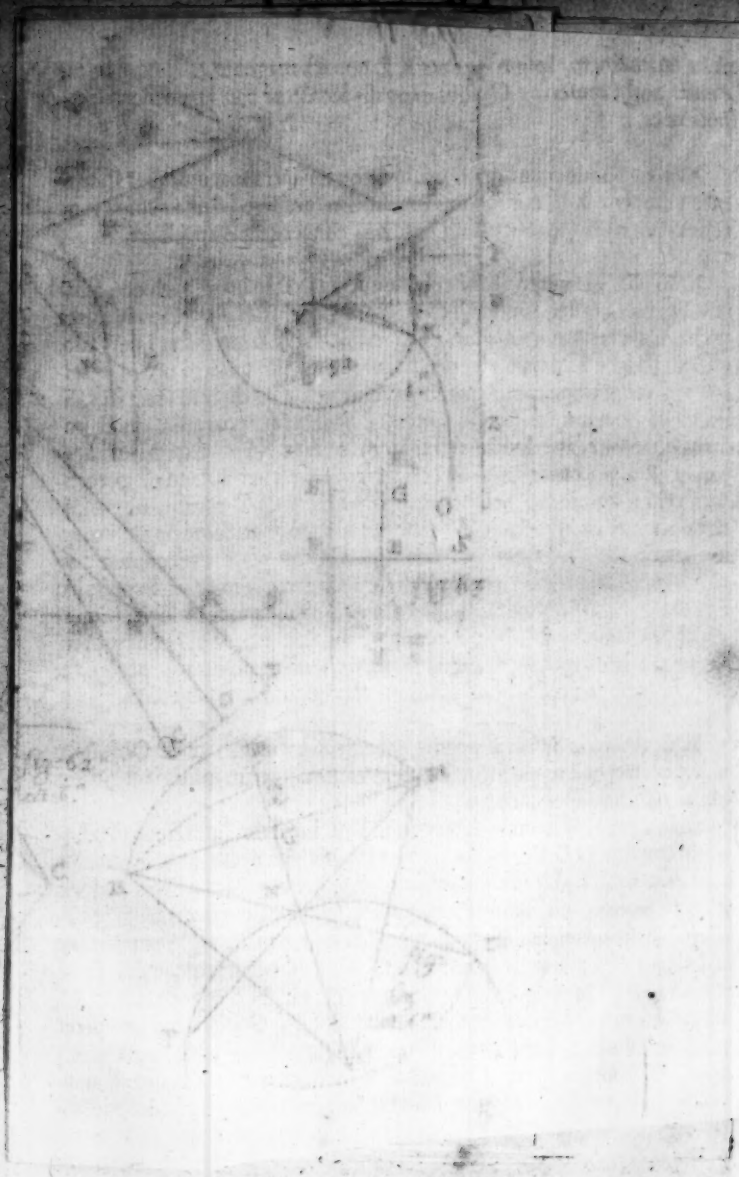


Fig. 68.

pillæ latiusculum, ipsam spatium K Z non ita magnum esse, quin instar *Puncti* possit censeri. Quibus expensis luculenter constare videtur propositum.

XVIII. Subdo tantùm, si oculus usquam intra spacium Z B statuatur, visionem indè confusam, aut nullam evadere; quia nempe tunc reflexi præcipui (seu rectissimi) oculum convergentes appellent.

XIX. Ex his porrò facilè refelluntur, quæ de imaginis loco plenique tradunt omnes Optici, cum illis novissimus *Honor. Fabri*; juxta quorum doctrinam imago à puncto reflectionis tanto distat intervallo, quanto punctum radians ab eodem semovetur; ità quidem ut Sol ex hujusmodi reflectione conspicuus ad tantam, quantam directè spectatus, distantiam (eorum insistendo sententiæ) debeat apparere. quod immane quantum experientiæ refragatur. etenim si Soli exponatur *Speculum* R B e (concavum, aut convexum) sic ut ei Sol quasi perpendiculariter immineat, oculúsque prope axem B C constituatur usquam; ferè circa punctum Z, arbitrante sensu, luculenta Solis imago sese præbebit oculo conspiciendam; id quod juxta ratiocinium nostrum necessariò debuit evenire. verum hic error (in Opticâ capitalis, & quo non ablegato nulla phænomeni cujuscunque ratio verisimilis constabit) ubique se objiciet refutandum. hîc itaque pluribus parco; pergóque versùs oculum extra radiationis axem positum, postquam unicam hanc præcedentibus adnexam observationem subjecero.

XX. Majoris Sphæræ portio vehementiùs urit; ut & Objectum visibile clarius atque distinctiùs repræsentat, quàm minoris æqualem obtinens latitudinem portio.

Super eandem nempe subtensam N V insistant imparium circulorum segmenta N B V, N b v; quorum axis A D; & in hoc circulorum centra C, c; constat ut minoris peripheriam N b v extra majoris N B V jacere; ità majoris centrum C infra minoris centrum c exi- Fig. 69.
stere. bisecentur jam Semidiametri C B, c b in Z, z; ducantúrque tangentes B T, b t; bisque ductæ C N, c N occurrant punctis E, e; demùm radii P N axi paralleli sit ad peripheriam N B V reflexus N K; ad ipsam verò N b v sit ejusdem reflexus N k; liquidissimè jam patet quod sit N e = N E; hoc est quòd dupla z k major sit duplâ Z K; adeóque simpla z k major simplâ Z K. majoris itaque Sphæræ portio strictiores intra terminos illabentem lucem cogit; adeóque potentiùs operatur; eâdemque de causa rem objectam illustriùs atque

distinctius exhibet obtuenti, quod erat propositum ostendere. Et hæc quidem ad locum imaginis determinandum attinentia pleraque propter oculum in axe situm sufficerit attigisse. Superest ut idem oculi gratiâ secùs constituti pertentemus. id operis sequenti deputamus.

LECT. VII.

I. ID nunc agimus, ut ab infinito quoad sensum intervallo radiantis puncti, è reflectione circularem ad peripheriam peracta oriundæ imaginis, oculi respectu præter axem siti, locum exquiramus. quocirca primùm ipsa recta linea determinanda venit, in qua locus iste versatur; tum ipsissimum præcisè punctum est designandum. In primi verò propositi gratiam hoc *Problema* confici debet.

II. Dato circulo reflectente BNP (cujus centrum C) rectâque CB positione data; designandus est huic parallelus radius, cujus reflexus per datum transeat punctum.

Fig. 70. III. Si datum punctum (puta K) in ipsa CB existat, facilimè peragitur negotium. nam si centro K, intervallo KC describatur circulus, ipsi reflectenti occurrens in N; erit KN reflexus ducti ad CB paralleli; prout ex antedictis abunde perspicuum est.

IV. Si datum punctum (puta jam X) in ipsa reflectentis circumferentia versetur; arcûs trisectione statim exhauritur *Problema*. Nam ducatur XH ad BC parallela (quæ quidem ipsa uno modo problemati satisfacit) & interceptus arcus XH secetur punctis N, P, ut
Fig. 71. sint arcus XN, NP, PH æquales inter se; connectantúrque rectæ XN, NP. dico factum. etenim ducantur CN, XP; & patet angulum CNX ipsi CNP æquari; adeóque fore XN reflexum ipsius PN; quinetiam ang. NPX æquatur angulo HXP; proindéque NP ipsi XH, hoc est ipsi BC, parallela est. itaque factum.

V. Verùm

V. Verùm extra casus hos, & particulares alios (mihi non incognitos, at nunc ἀπερισκέπτως) *Problema* magis solidum est, in summo quippe gradu tale, quatuórque subinde Solutiones admittens, perque lineam evolvi potest (ut alia pleraque, sicuti pridem admonitum nobis) sibi peculiarem, illam hoc modo quàm expeditissimè per puncta describendam: Per datum punctum X protendatur indefinitè recta GF. ad datam CB parallela, connectatúrque recta XC, & super hanc ceu diametrum describatur circulus XICI, tum è puncto C prodeant quotcunque rectæ circulum XIC secantes punctis I, rectámque GF punctis H, & adsumantur in rectis CHI rectæ IN æquales interceptis IH (ità scilicet ut puncta I rectas NH perpetuò bisecent) perque puncta quotvis ejusmodi N traducta concipiatur linea, nimirum hæc (quâ certè nulla Sectio conica facilius delineatur) problematis nostri constructioni deservit, ejúsque liquidò naturam patefacit, siquidem ejusce cum dati circuli intersectiones N (illæ verò subinde quatuor erunt, interdum tres (contactum enim intersectionibus adnumero) nonnunquam Solummodò duæ, prout datus circulus magnitudine præditus est aliâ ac aliâ, quæ strictim adnoto tantùm, animum advertenti manifestè constitura) possibiles quasque Solutiones exhibebunt. ducatur enim ab ipso X ad ejusmodi quamvis intersectionem N recta XN, & per N transeat MP ad BC parallela (vel ad GX) connexáque CN circulum XIC secet in I, rectámque GX in H, item jungatur XI. & quoniam è descriptæ lineæ naturâ seu constructione est IH=IN; angulúsque CIX, in Semicirculo, rectus est, erit XN=XH; vel ang. XNI = ang. XHI. atqui ang. XHI alterno HNP par est. quapropter anguli XNI, HNP pares sunt. adeóque recta NX ipsius NP reflexus erit. quod oportebat fieri. sic, inquam, enodari poterat id Problematis. at quoniam (ut innuebam suprà) *Geometrarum palato minùs sapiunt hujusmodi Problematum inusitatæ solutiones*; aliter id (satis breviter atque perspicuè) dabimus effectum hoc saltem eò faciens Lemmaticum Problema præmittentes. Fig. 72.

VI. Dato circulo (cujus positione data diameter GF) & puncto C in ejusce circumferentia quoque dato; per hoc recta ducatur, cujus pars diametro circumferentiæque interjecta æquetur datæ rectæ Z.

Id sic exequimur. Connectatur recta CF; & huic perpendicularis ducatur recta FV; & accipiatur ad ipsas Z, GF tertia proportionalis P; & per G angulo CFV inferatur recta RS par ipsi P (id autem quomodò præstandum, edocuimus suprà) tum per C

ducatur

ducatur CHL ad RS parallela; erit intercepta HL (quod requiritur) æqualis ipsi Z. Nam connectatur CG; & huic perpendicularis ducatur GT; ad CF proinde parallela. quia jam ang. GCT = CGR = FSR, liquet rectangula trigona CGT, RFS assimilari. adeóque fore CT. CG :: SR. SF. item (ob similitudinem triangulorum CGH, SFG) est CG. GH :: SF. FG. erit igitur ex æquo CT. GH :: SR. FG. (hoc est) :: FG. Z. verum est CT. FG :: CH. FH :: HG. HL. permutandóque CT. HG :: FG. HL. quare FG. Z :: FG. HL. liquet igitur HL ipsi Z datæ æquari: Q. E. F.

Plures esse casus possunt; ut nempe punctum L sit intra Semicirculum GCF (idque positum inter puncta C, G, vel inter ipsa C, F) vel in altero Semicirculo GEF, ultra GF sito respectu puncti C; sed hæc una constructio simul ac demonstratio pariter omnibus convenit; ut pluribus huc non sit opus. Fig. 73, 74.

VII. Adnotetur saltem quoad istos casus, quòd sicuti per punctum G (ut antea commostratum) aliquando quatuor rectæ duci possunt datam adæquantes, rectisque FC, FV terminatæ; binæ scilicet inter angulum quo punctum G continetur, alteræque totidem extra ipsum; nonnunquam verò tres solæ; quum data recta minima continget esse cunctarum, quæ dicto punctum G continenti angulo possunt interseri; subinde tantùm duæ, quando data tali minimæ cedit; ità respective Problema jam expositum plures totidem solutiones accipit. Sanè quò major est hîc data Z, eò minor evadet intercepta RS; & viciſſim quò minor RS, eò major ipsa IZ; unde si fuerit RS omnium minima, quæ angulo CFV punctum G capienti inseri possunt, etiam HL maxima erit è C prodeuntium rectarum, quæ inter diametrum GF, & Semicirculum GEF comprehendi possunt. unde *Porismatis* loco patet, è supradictis, quo pacto talis maxima duci possit; & hoc ipsum Problema penitus determinari. quod attendenti non obscurum innuisse satis videtur. jam ad principalis quæsiti resolutionem accedimus; ità jam brevitur propositi.

VIII. Per datum punctum X rectam ducere, cujus reflexus datæ positione rectæ BC sit parallelus. Fig. 73, 74.

Id sic efficitur. Centro X per C describatur circulus GLFC; item per X ducatur GF ad BC parallela; tum ex C projiciatur recta, cujus secundum Lemma mox præcedens, intercepta pars HL æquetur Semidiametro reflectentis circuli; quæ & illum secet in N; ductæ

ductæ XN reflexus (puta NP) ipſi BC parallelus erit. Nam connexis XC, XL, quoniam CN = HL, & CX = LX, & anguli XCL, XLC pares ſunt, erit XH = XN. quapropter erit NP ad XH, vel BC parallelus: Q.E.F.

IX. Ex hac conſtructione, cum præmiſſi lemmatis ſolutione collatâ diluceſcet hujuſmodi non ultra quatuor reflexos per idem quodcunque punctum, ceu X, tranſire, quorum duo ad unas axis partes incidentibus, reliqui ad alteras conveniunt. adparebit etiam ſi CN major ſit, quam ut ei par HL rectâ GF, Semicirculóque GEF intercipi poſſit, quòd ad axis partes, ad quas ipſum X ponitur, omnino nullus per hoc punctum reflexus meabit; quinetiam ſi CN tanta ſit, ut ei par una tantùm ejuſmodi recta poſſit intercipi, quòd unicus per ipſum X reflexus iter ſuſcipiet. tales, inquam, expoſiti problematis determinationes hanc conſtructionem haud obſcurè ſequuntur, quas certè tu meliùs uno mentis (haud dormitantis) ictu perſpexeris, quàm ego pluribus verbis explicâro. Fig. 75.

X. Exhinc itaque denuò rectam (ſeu rectas) ſatis definivimus, in qua (vel in quibus) puncti radiantis Imago, reſpectu visûs utcunque poſitione datum centrum habentis, conſiſtit. ad ejus jam præciſiorem locum inveſtigandum accingemur; in iſtarum rectâ quâpiam exiſtentem.

XI. Huc adnoteur imprimis, quòd ſi duorum ad eaſdem axis partes incidentium parallelorum (NP, RS) reflexi ſint Nσ, Rσ; erit arcus NR, vel PS arcûs $\sigma\sigma$ ſubtriplus. Concurrant enim dicti reflexi in X, & Connectatur recta Rσ. & quoniam, è præmonitis, angulus NXR duplus eſt anguli arcui NR ad centrum inſiſtentis; erit idem angulus NXR anguli NσR quadruplus. quapropter erit ang. NXR — ang. NσR triplus anguli NσR, hoc eſt, angulus XRσ anguli NσR triplus. unde quoque triplus erit arcus $\sigma\sigma$ ipſius NR: Q.E.D. Fig. 76.

XII. Iiſdem ſtantibus dico fore RX (obliquioris reflexi partem incidentiæ concurſûſque punctis interceptam) majorem quadrante totius reflexi Rσ. Nam, ductis ſubtenſis NR, $\sigma\sigma$; erit 1.3:: arc. NR. $\sigma\sigma$. $\supset$ recta NR. $\sigma\sigma$:: RX. Xσ $\supset$ RX. Xσ (quia ſcilicet eſt Xσ $\sqsubset$ Xσ). igitur eſt Xσ minor triplâ RX; componendóque minor erit Rσ quadruplâ RX: Q.E.D.

XIII. Item

XIII. Item, dico fore NX (rectioris itidem reflexi concursûs incidentiæque punctis interjectam partem) minorem quartâ parte totius N⌀. Etenim fiat ang. HR⌀ = ang. N⌀R; quapropter erit HR = H⌀; adeóque 2H⌀ = HR + H⌀ ⊏ R⌀ ⊏ N⌀. item quoniam ang. RHN = 2 ang. HR⌀ = ang. XRH; est XH = XR ⊏ XN. quum itaque sit H⌀ major semisse totius N⌀; & XH major semisse residui NH; liquet totam X⌀ majorem esse triplâ XN; seu totam N⌀ majorem esse quadruplâ NX: Q. E. D.

XIV. Hinc perspicuum est, si fuerit NZ reflexi N⌀ quadrans, quòd nullus alter hujusmodi reflexus punctum Z permeabit. Etenim alterius cujusvis reflexus permeare dicatur; erit igitur, si obliquior is fuerit, NZ ⊐ ¼ N⌀; sin rectior fuerit, erit NZ ⊏ ¼ N⌀ (nimirum è proximè demonstratis hæc consequuntur) quæ repugnant hypothesi.

Fig. 77. XV. Quinetiam ipsi N⌀ propiùs adjacentium occursus puncto Z vicinjores sunt, hinc indè. Secent. inquam, radiorum LM, RS reflexi Lμ, R⌀ ipsam N⌀ punctis Y, X; istæ quidem (rectior) in Y, hic (obliquior) in X; erit ZY ⊐ ZX. Nam connectantur R⌀, L⌀; & fiat ang. ⌀LH = ang. N⌀L; ducantúrque rectæ RH, RY. estque RH ⊏ LH = H⌀; adeóque ang. H⌀R ⊏ ang. HR⌀; & proinde ang. NHR ⊐ 2 ang. H⌀R. item YR ⊏ YL = YH; proindéque rursus ang. NYR ⊐ 2 ang. YHR. quare multo minor est ang. NYR quadruplo N⌀R est autem ang. NXR quadruplus anguli N⌀R; igitur ang. NXR ⊏ ang. NYR. ponatur jam, si fieri potest, punctum X ipsis Y, Z interjacere. erit igitur angulus externus NYR interno NXR major; atqui minor ostensus est. quæ repugnant. itaque potiùs est ZY ⊐ ZX: Q. E. D.

Ad alteras partes haud absimilis erit discursus; parco fastidiosæ repetitioni. ||

XVI. Hinc obiter patet ad easdem partes incidentium reflexos sese priùs (velut ad ⌀) quàm ipsum N⌀ decussare.

XVII. Quinimò rursus hinc constat ad easdem axis partes plures duobus in uno puncto reflexos non concurrere.

XVIII. Demùm (ut aliquando tandem destinatum attingamus scopum) è dictis

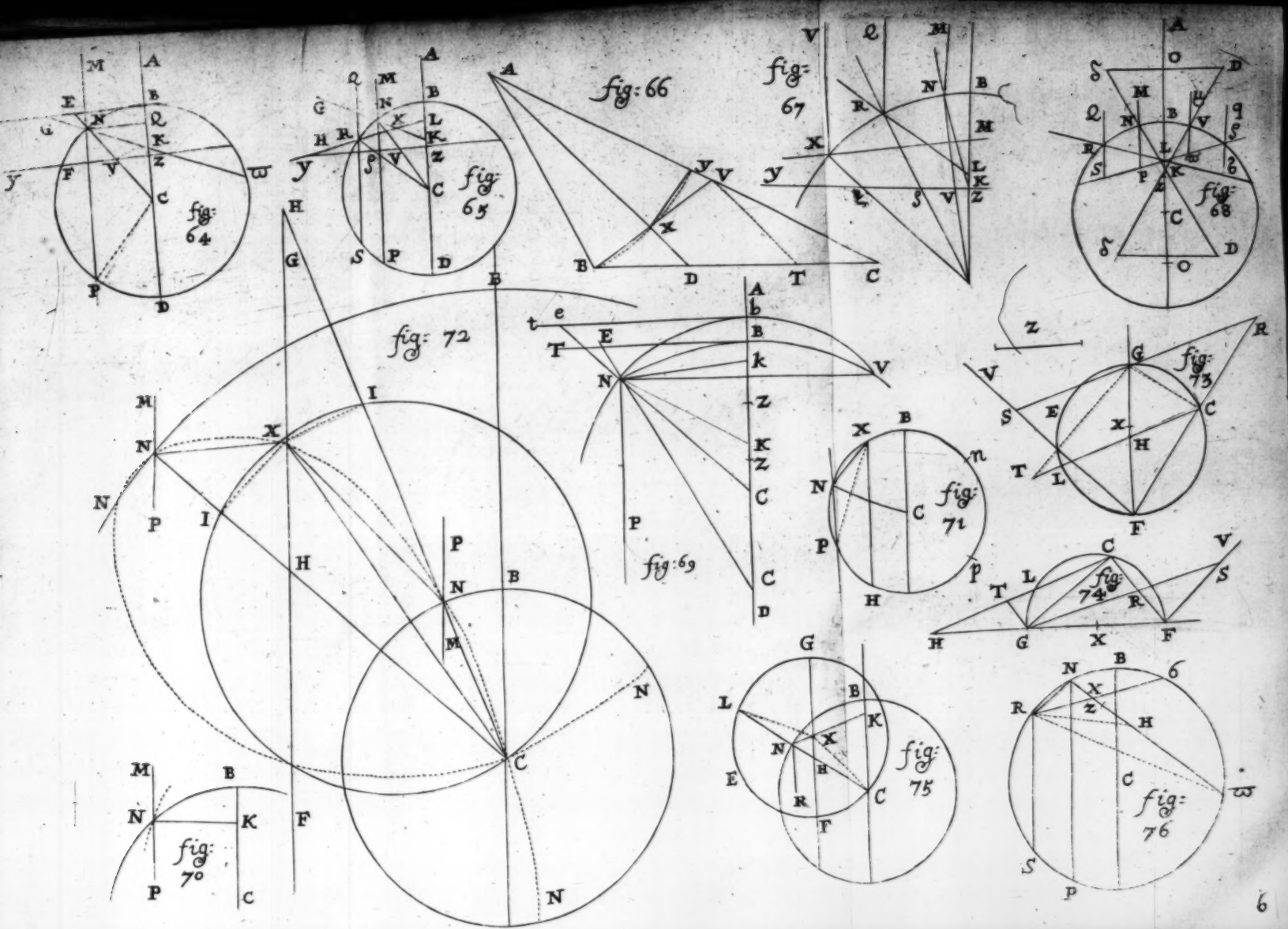


fig: 64
fig: 65
fig: 66
fig: 67
fig: 68
fig: 69
fig: 70
fig: 71
fig: 72
fig: 73
fig: 74
fig: 75
fig: 76

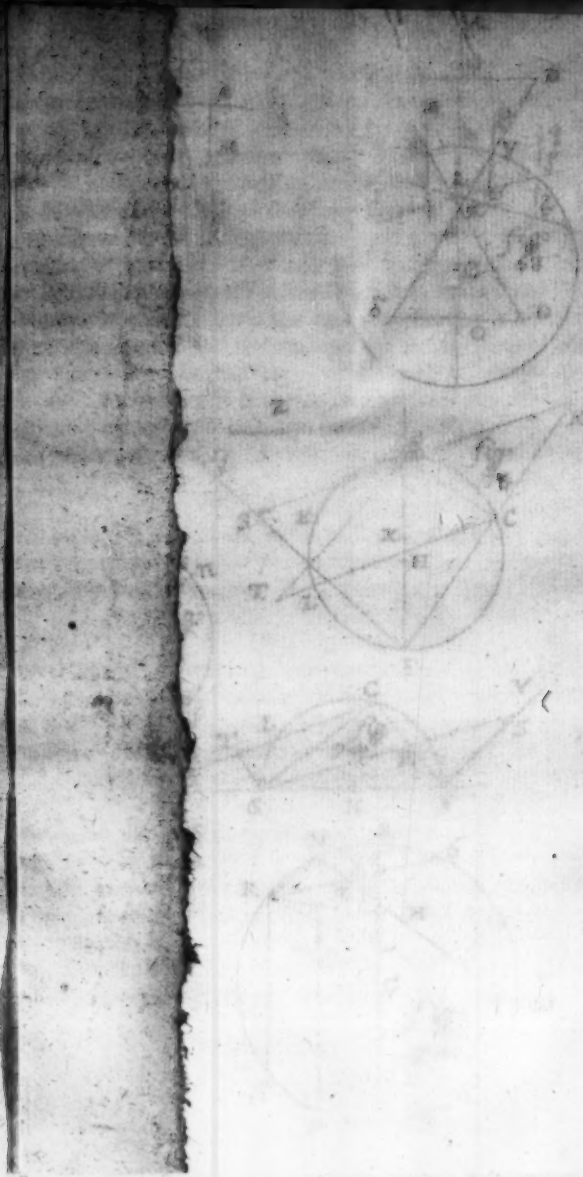


Fig. 77.

è dictis colligatur licet; quòd oculo, cujus Centrum O uspiam in ipsa N ω ponitur, circa punctum Z (ipsam N ω prænotato modo quadrisecans) radiantis imago conspicietur. Sit enim pupillæ (prout antehac aliquoties) diameter E F; per cujusce terminos transeant radiorum L M, R S reflexi L E, R F; quorum iste secet ipsum N ω in Y, hic in X. quoniam igitur radiorum obliquiorum ipso R S, rectiorum ipso L M nullus oculum intrabit; uti suprà non semel argumentati sumus, intra spatium X Y necessariò consistet imago. quinetiam cùm radiorum arcui L R incidentium qui prope punctum Z reflectuntur axi N ω propiùs adjacentes perpendicularius oculum feriunt; idque spissiùs (ut ex analogia par est existimare, nec enim id operosiùs aggrediar demonstrare) propter aliquoties expositas causas ab eo videbuntur obtutum afficientes radii promanare; hoc est ad ipsum imago consistet. Accedit quod ob angustiam pupillæ spatium X Y satis modicum existit; ut puncti modum vix excedere videatur. Fig. 78.

XIX. Subdo; si statuatur oculi centrum uspiam in Z N; isque versus partes N obvertatur; objectum confusiùs apparere, quippe cùm reflexi visum convergentes appellant; vel quoniam imago Z tunc pone visum consistit.

XX. Hinc à speculo Cavo tantùm una repræsentatur Imago, saltem bene distincta. Nam in duorum reflexorum N ω, R σ concursu X statuatur oculi centrum; & sit R ζ = ¼ R σ; unde R ζ ⊐ R X. itaque spectabitur quæ ad ζ imago ab oculo in X collocato, versúsque partes N R obverso; sed tum imago Z post oculum consistit.

XXI. Et hæc quidem rectè percepta, serióquè perpensa vix addubito quin facilè sibi fidem conciliatura sint; nihil ut sit opus adversantia *seu veterum Opticorum decreta, seu recentiorum Commenta pluribus convellere*; quæ certè cùm nullâ perspicuâ ratione nituntur, tum ab experientia plerumque discordant. Cætera verò siqua restant ad hoc argumentum spectantia studio vestro commendabimus elicienda; mox ad è sensibiliter finita distantia radiantis puncti *Symptomata* similiter exploranda animum adjecturi.

Lect. VIII.

I. Quæ radiis obveniunt à longinquo puncto manantibus, adeóque quasi parallelis, ex reflectione peripheriam ad circularem peractâ; ubinam & quousque vel sibimet ipsis occurrunt, vel axem intersecant, quo loco radians oculo ubicunque constituto repræsentant, in postremis est dissertatum. ad punctum jam accedimus radios ejiciens sensibiliter divergentes. Et hujusmodi quidem puncto, quanquam seu in obversas circuli Convexas partes seu ad concavas radiet communia pleraque symptomata conveniunt; tamen communi fretus *Opticorum* exemplo, præsertimque majoris evidentiæ causâ, casus istos distinctè prosequemur; illum fusiùs imprimis, hunc aliquanto concisiùs. ad rem.

II. In circuli BNP (cujus centrum C) convexum à puncto A quilibet incidat radius AN, isque reflectatur in NG; patet reflexum GN productum axi AC occursurum. nam ductâ CNE patet GN productum angulum ANC secare; nec non ideò trianguli ANC basin AC; puta in K; quo posito.

III. Dico fore AC. AN::KC. KN. Nam ducatur KH ad CN parallela. est igitur ang. KHN = CNP = CNK = NKH. hoc etiam è superius generatim ostensis consectatur. adeóque NH = NK. itâque cùm sit AC. AN::KC. HN. erit etiam AC. AN::KC. KN.

IV. Corollarii loco notetur (ductâ CP) fore NH = NK; & triangula HNK, NCP assimilari; vel esse HK. HN::NP. CN.

V. Porrò, constantibus iisdem, dico fore AC. KC::ACq — ANq. CNq. Nam est NP. CN + AN. CN = HK. HN + AN. CN = HK × AN. HN × CN = AN. HN +

+HK.CN. = AC.KC + AK.AC = AK.KC. verùm est NP.CN + AN.CN = NP × AN.CNq. ergò erit AK. KC :: NP × AN . CNq. componendóque AC.KC :: NP × AN + CNq.CNq. cum sit igitur NP × AN = AP × AN — ANq. & AP × AN = ACq — CNq; adeóque NP × AN + CNq = ACq — CNq — ANq + CNq, = ACq — ANq. erit AC.KC :: ACq — ANq.CNq: Quod E.D. Fig. 79, 80.

Coroll. AK.KC :: AN × NP.CNq.

VI. Etiam hoc *Theorema* subdemus: Si fiat 2 CA . CN :: CN.E. & 2 CK.CN :: CN.F, & sumatur CQ = E + F, erit ducta NQ ad CA perpendicularis. vel reciprocè, posito quòd sit NQ ad CA perpendicularis, erit CQ = E + F. || Nam (ut hoc posterius ostendamus) quoniam est 2 CA.CN :: CN.E. & GN. 2 CK :: F.CN. erit ex æquo perturbatè 2 CA. 2 CK :: F.E. vel CA.CK :: F.E. componendóque CA + CK.CK :: F + E.E. Porrò quoniam est ANq = ACq + CNq — 2 AC × CQ, erit 2 AC × CQ — CNq = ACq — ANq. itaque (juxta præcedentem) erit 2 AC × CQ — CNq.CNQ :: AC. CK. hoc est (ob CNq = 2 AC × E) 2 AC × CQ — 2 AC × E. 2 AC × E :: AC. CK, hoc est CQ — E.E :: AC.CK. vel componendo CQ.E :: AC + CK.CK. erat autem AC + CK.CK :: F + E.E. ergò CQ = F + E: Quod E.D.

VII. Ex istis porrò deducetur, si dividatur Semidiameter BC in Z, ut sit AC . AB :: CZ.BZ, punctum Z limes erit citra quem (respectu centri C) nullus hujusmodi reflexus axem decussabit. Cujusvis, inquam, radii AN esto reflexus GN, axi occurrens in K. dico fore CK ⊏ CZ. Nam ob hypothesin (permutandóque) est AC. CZ :: AB.BZ. igitur (antecedentes, & consequentes copulando) AC.CZ :: AC + AB.CB. quare (posterioris hujusce rationis utrumque terminum in æquales AC — AB, & BC ducendo) erit AC.CZ :: ACq — ABq.CBq. est autem ACq — ABq ⊏ ACq — ANq; adeóque ACq — ABq.CBq. ⊏ ACq — ANq.CBq :: AC.CK (è mox ostensis hoc) quapropter erit AC . CZ ⊏ AC . CK. indéque CK ⊏ CZ: Q.E.D. Fig. 81, 82.

VIII. Aliter hoc idem; ut quibusdam fortasse videbitur, minùs involutè: per N ducatur VT circulum contingens. & quoniam NT

hiſecat angulum ANK; erit AN. NK :: AT. TK. ⊐ AB. BK. quare BZ. AB + AN. NK ⊐ BZ. AB + AB. BK (communem adſciſcendo rationem BZ ad AB). eſt autem BZ. AB + AN. NK = CZ. AC + AC. CK = CZ. CK & BZ. AB + AB. BK = BZ. BK. ergo CZ. CK ⊐ BZ. BK. permutandóque CZ. BZ ⊐ CK. BK. quin & componendo CB. BZ ⊐ CB. BK. ideóque BZ ⊏ BK; quare punctum Z centro propinquius eſt, quàm ipſum K: Q. E. D.

Coroll. Hinc ſi puncta Z, ζ fuerint limites punctorum radiantium A, α (quorum A ſit à ſpeculo remotiùs, quàm α) erit CZ ⊐ Cζ. Nam eſt BC. AB ⊐ BC, αB. adeóque compoſitè AC. AB ⊐ αC. αB. hoc eſt CZ. BZ ⊐ Cζ. Bζ. quare componendo BC. BZ ⊐ BC. Bζ. & indè BZ ⊏ Bζ.

IX. Porrò, conſectatur è præmiſſis, quòd ſi duorum quorumvis incidentium AN, AR reflexi GN, HR axem interſecent punctis K, L; erit CL, CK :: ACq − ANq. ACq − ARq. || Nam quoniam eſt AC. CK :: ACq − ANq. CBq. itémque CL. AC :: CBq. ACq − ARq. erit ex æquo perturbatè CL. CK :: ACq − ANq. ACq − ARq.

X. Simili planè diſcurſu, ſi fuerit AC. AB :: CZ. ZB. erit CZ. CK :: ACq − ANq. ACq − ABq. & CL. CZ :: ACq − ARq. ACq − ABq.

XI. Hinc perſpicuum eſt obliquioris reflexi concurſum à centro magis elongari quàm rectioris, quòd nempe ſit CL ⊏ CK. Cùm enim ſit ACq − ANq ⊏ ACq − ARq, erit CL ⊏ CK.

XII. Hinc neceſſariò duo quilibet ad eaſdem axis partes incidentium reflexi (quales NK, RL) ſeſe prius quam axem interſecabunt, puta ad X. quo poſito.

XIII. Adnotari poteſt angulum GXH vel KXL (à reflexis occurrentibus incluſum) æquari angulo NCR unà cum differentia angulorum incidentiæ; vel duplo angulo NCR unà cum ang. NAR. || Etenim
Fig. 83. ang. KXL = ang. ALR − AKN = ang. ACR + CRL − : ang. ACN + CNK = ang. ACR − ACN + : ang. CRL − CNK = ang NCR + : ang. CRS − CNP. || Quinetiam ang. CRS − CNP = ang. RCA + CAR − : ang. NCA + CAN

CAN = ang. NCR + NAR. itaque rursus ang. KXL = 2 ang. NCR + ang. NAR. liquent igitur quæ propolita sunt, in usum (si fortè) sequentium. pro quibus itidem hæc proponenda sunt.

XIV. Etiam palàm est è dictis ipsos reflexos GN, HR directè procurrentes à se divergere; adeóque duntaxat unum hujusmodi reflexum oculi centrum transire; consequenter & puncti A tantum unam à convexo speculo imaginem exhiberi. Fig. 83.

XV. *Lemmata* 1. Sint quæcunque tria quanta A, P, C; primóque sit A.B ⊏ B.C; dico fore A + C ⊏ 2 B. ponatur enim fore A.B :: B.E. erit ergò A + E ⊏ 2 B. quinetiam erit ergò B.E ⊏ B.C adeóque C ⊏ E. ergò magis A + C ⊏ 2 B.

2. Sit (iisdem adhibitis quantis) secundò A + C ⊐ 2 B. dico fore A.B ⊐ B.C. nam sive dicatur esse A.B :: B.C. vel A.B ⊏ B.C. sequetur utrobique fore A + C ⊏ 2 B; contra hypothesin. itaque potius est A.B ⊐ B.C.

XVI. Etiam hoc adjungo. Si duo sumantur ad easdem axi partes (circulíque convexâ parte comprehensi) sibimet æquales arcus NR, RX; & ducantur rectæ AN, AR, AX; erit ANq + AXq ⊏ 2 ARq. Fig. 84.

Nam ducantur CN, CR, CX; & demittantur ad AC perpendiculares NE, RF, XG; sint item NP, RQ ad AC parallelæ ducantúrque subtensæ NR, RX.; & quoniam ang. RXQ ⊏ ang. NRP; patet esse RX.RQ ⊐ NR.NP; adeóque cum RX = NR, erit RQ ⊏ NP; hoc est FG ⊏ EF. ergò 2 CF ⊏ CE + CG; unde 4 AC × CF ⊏ 2 AC × CE + 2 AC × CG atqui est ANq = ACq + CNq − 2 AC × CE. & AXq = ACq + CNq − 2 AC × CG. & 2 ARq = 2 ACq + 2 CNq − 4 AC × CF. ergo ANq + AXq ⊏ 2 ARq.

Addo, sequentium gratiâ, si punctum A sumatur ad alteras (infra centrum) partes; & reliqua similiter apparentur; fore contra, tum ANq + AXq ⊐ 2 ARq. nam in eo casu est ANq + AXq = 2 ACq + 2 CNq + 2 AC × CE + 2 AC × CG. & 2 ARq = 2 ACq + 2 CNq + 4 AC × CF. unde liquet propositum.

XVII. Sint jam ad easdem axis partes duo quilibet æquales arcus NR,

NR, RX; & incidentinm AN, AR, AX reflexi GN, HR, IX
Fig. 85. axi occurrant producti punctis K, L, M; erit intervallum ML ab obliquiorum occursibus conclusum majus ipso LK rectiorum occursibus intercepto.

Nam quoniam est ANq + AXq ⊏ 2ARq. erit 2ACq — ANq — AXq ⊐ 2ACq — 2ARq. adeóque ACq — — AXq. ACq — ARq ⊐ ACq — ARq. ACq — ANq. hoc est, è præmonstratis, CL. CM ⊐ CK. CL, vel inversè CM. CL ⊏ CL. CK. quapropter erit CM + CK. ⊏ 2CL. & ideò CM — CL ⊏ CL — CK hoc est ML ⊏ LK: Q.E.D.

XVIII. Hinc constat, etiam in hac hypothesi, rectiùs incidentem lucem à reflectione magis inspissari, seu spatio versus limitem Z arctiore constringi.

XIX. Quin ab his demum omnibus colligitur, si uspiam in axe (velut ad O) constituatur oculi centrum, quod punctum A necessariò circa limitem Z apparebit. Etenim (prorsus ut in præcedente
Fig. 85. quoad radios ab infinitè dissito puncto manantes hypothesi) ab axis illi puncto adjacente parte radii cùm copiosiores, tum axi vicinioces, oculóque rectiores, efficaciâ proinde præpollentes, nec non qui faciliùs re-adunentur, provenire videntur. quæ nempe cuncta simul ac emergentem propositi consequentiam abunde, puto, dedimus enucleata. Succedit ut hâc parte defuncti pro visu extra radiationis axem collocato itidem imaginis sedem definiamus. veruntamen hæc, quanquam haud ità quantitate multa, pro rei tamen obscuritate fortassis nimia videbuntur. itaque jam opportunum autumo desistere.

Lect.

Lect. IX.

I. QUaliter in obverſum Speculi circularis convexum finitè diſtans punctum radiat, & ubi loci adparet oculo in recta conſticuto per ipſum radians & ſpeculi centrum trajecta poſtremò conniſi demonſtrare, nunc idem quoad aſpectum aliàs ubicunque ſitum aggredimur explicari. quò primum attinet ut rectam inveſtigemus, in qua conſiſtet Imago; tum ut punctum ejus in iſta recta præciſum determinemus. & primo quidem negotio ſatisfactum erit hujuſmodi *Problema* conficiendo; quod (ſequentium quoque gratiâ) generatim proponimus.

II. *Dato circulo reflectente* (cujus centrum C) *datiſque binis punctis; ab horum uno recta ducatur, cujus reflexus per alterum tranſeat.*

1. Si data puncta (puta A, X) ſint ambo in circuli peripheria, manifeſtum eſt biſecto arcu A X in N, connexiſque ſubtenſis N A, N X, rectas N A, N X ſibi mutuò reflexas fore; ſeu, junctâ C N, angulum C N X angulo C N A æquari. Fig. 86.

2. Etiam ſi datorum unum (X) in circumferentia ponatur; liquet, connexis A X, C X, factóque angulo C X H = C X A, fore X A, X H alterum alterius reflexum. Fig. 87.

3. Item ſi data puncta (A, X) æqualiter à centro diſtent; connexis rectis A C, X C, biſectóque angulo X C A à recta C N circulum reflectentem interſecante ad N; perſpicuum eſt conjunctas rectas A N, X N, invicem in ſe reflecti; vel angulum C N X ipſi C N A æquari. Fig. 88.

III. 4. Si puncta data (puta jam A, K) ambo exiſtant in recta per reflectentis centrum tranſeunte (nempe A B K C.)

1. Fiat C K. A C :: C B. T. ac inter C B, & T ſit proportione media V (unde C B q. V q :: C B. T :: C K. A C). tum centro A, intervallo $\sqrt{}$ :: A C q — V q. deſcribatur circulus reflectentem ſec ans Fig. 89.

secans in N; & per N ducatur KNG; hæc ipsius AN reflexa erit.

Fig. 89. Nam ob $ANq = ACq - Vq$. erit $Vq = ACq - ANq$. adeóque $CBq . ACq - ANq :: (CBq . Vq ::) CK . AC$. quod, è præmonstratis, reflectioni proprium est. ergò liquet propositum.

2. Ità quidem in hoc casu; at si punctum A ponatur aliàs, ut sit $AC \sqsupset AN$; reliquis stantibus, Sumendum erit intervallum $AN = \surd : ACq + Vq$; ut sit $ANq - ACq = Vq$. ut posthac constabit, ubi de concavis agemus. Aliter hoc idem. Fiat $2 CK . CB :: CB . E$. & $2 CA . CB :: CB . E$. sumatúrque $CQ = E + F$. & ducta QN ad AC perpendicularis circulum secet in N: connexæ AN, KN altera alterius reflexa erit. hoc è suprà dictis liquidò consectatur. At si fuerit $AN \sqsubset AC$; tum accipi debet $CQ = F - E$; & (reliquis nihil immutatis, utì postmodùm apparebit) factum erit.

IV. Intra casus hos *Problema*, ceu videtis, facilè construitur; ast illos; aliósque speciales, si qui sunt, excipiendo, generaliter conceptum omnino Solidum est, & certè δυσμήχανον; vix ut aliud à *Geometris* hactenus attentatum difficilius reperiatur. Et primò quidem per lineam extrui, explicaríque poterit sibi peculiarem, hoc vel adsimili modo describendam.

Connexâ CA, super diametrum CA describatur circulus AIC; item semidiametro CA describatur alter circulus AHG. tum à C educantur rectæ quotvis CI circulum AIC secantes punctis I; & per A, I ductæ rectæ circulum AHG secent punctis H; demum per H,
Fig. 90. & X rectæ ducantur ipsas CI decussantes punctis N. per hujusmodi puncta quævis designabilia transibit linea, *Problematis* expositi solutioni accommodata. Sit enim ejus, ac reflectentis circuli quævis intersectio N (qualium certè pro reflectentis circuli magnitudine subinde quatuor, aliquando tres, modò binæ tantùm erunt) & connectatur AN. Et quoniam angulus CIA in Semicirculo rectus est, erit recta AH bisecta in I. adeóque triangula ANI, HNI sibimet æqualia prorsus & æquiangala erunt; & speciatim ang. INA = ang. INX. unde patet propositum.

V. Verùm quoniam (ut pridem admonitum) hujusmodi constructiones, etsi longè faciliores iis quæ per vulgò receptas lineas peraguntur, & *Problematum* naturam magis in propatulo collocantes à *Geometris* nihilo-

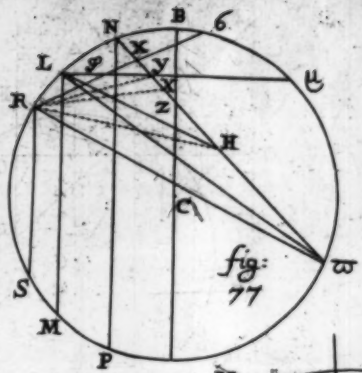


fig:
77

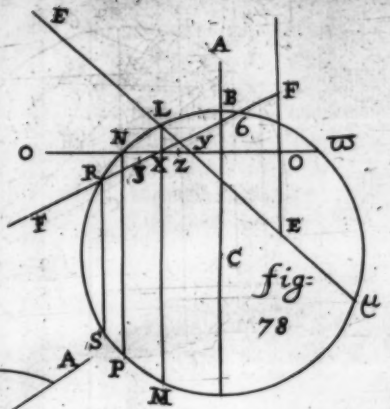


fig:
78

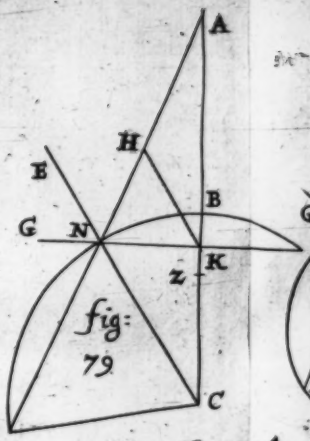


fig:
79

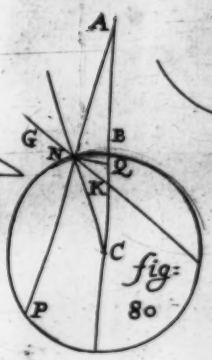


fig:
80

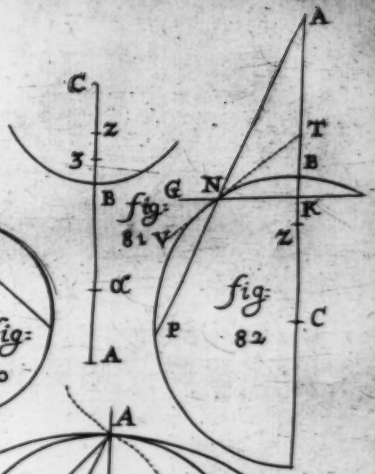


fig:
81
fig:
82

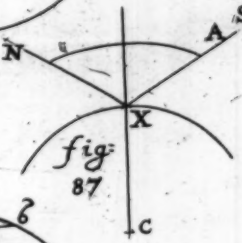


fig:
87

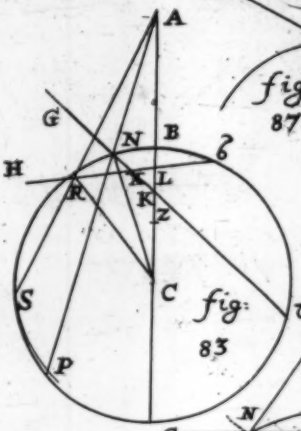


fig:
83

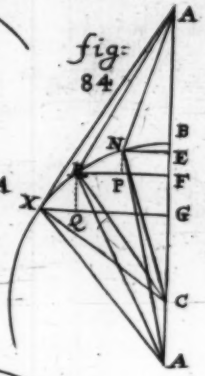


fig:
84

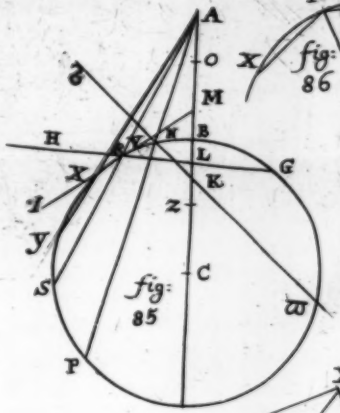


fig:
85

fig:
86

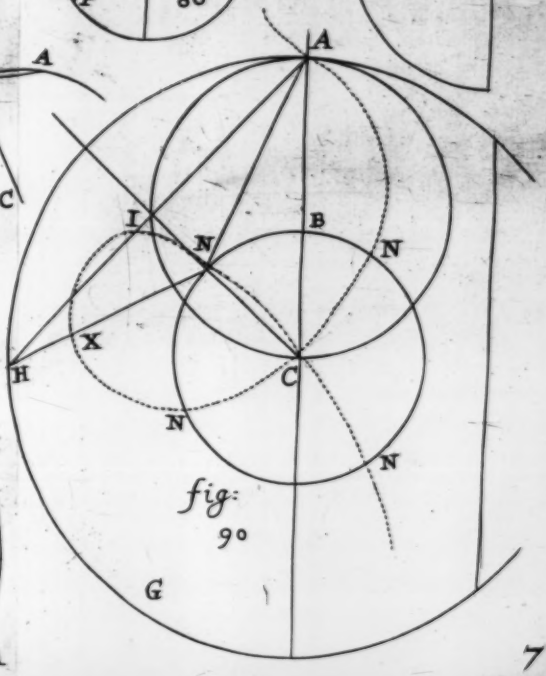


fig:
90

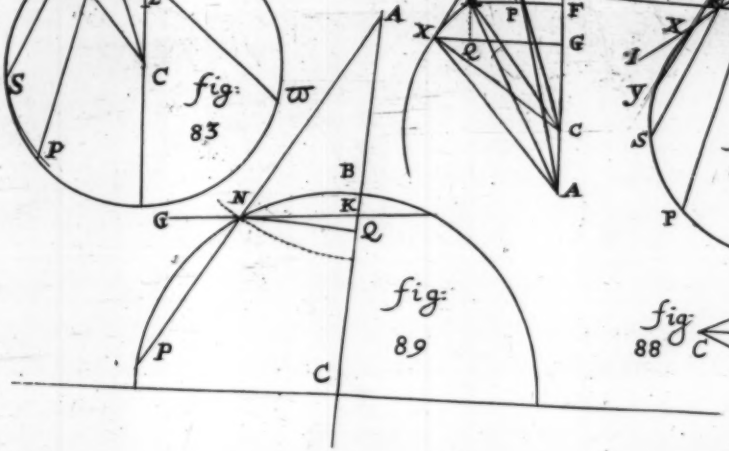


fig:
89

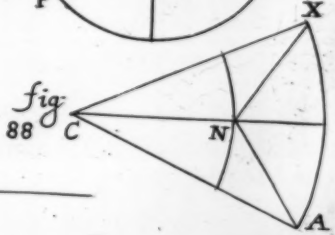


fig:
88

Fig. 89.

Fig. 90.

es a Geometris
nihilo-

nihilominùs gravatim admittuntur; istâ tantummodò raptim insinuatâ, subnectemus aliam ab illorum gustu non abhorrentem; illam nempe (quando scilicet haud aliâ meliori, ut varias pertentans analyses, & hoc in alia complura *Problemata* transformans existimari possum, facilè possit excogitari; quum & operæ meæ satis alioquin exercitatæ nonnunquam videatur parcendum) quam olim *Alhazenus Arabs* scriptis commendavit; ab horribili tamen illâ prolixitate simul ac obscuritate; neque non ab incondita sermonis barbarie nonnihil repurgatam. quorsum hoc præmittimus *Lemmaticum Problema.*

VI. Trianguli D P N angulus ad P rectus sit; & in hujus uno crure P N adsignetur punctum F; per F recta ducenda est, quæ reliquum latus D P (protractam nempe) ac hypotenusam D N ità secet, ut ab illis intercepta ad segmentum hypotenusæ lateri primò contermi-num datam obtineat proportionem R ad S. Fig. 91.

Hoc ità peragatur licet. Ducatur F H ad P D parallela. & Diametro H N describatur Circulus H F N (is nempe per F transibit, ob angulum H F N rectum) tum connectatur D F; & fiat angulus F H I = ang. F D N. sit etiam R. S :: D F. T. & a puncto I ducatur recta I L K diametrum H N intersecans ad L, & circulo occurrens in K, ita quidem ut sit intercepta L K = T (hoc autem quomodò præstetur in superioribus ostensum) denuò per puncta K F trajiciatur recta C F, ipsam D P secans in X. Dico factum, vel ipse C X. C N :: R. S. connectatur enim recta N K. & quoniam ang F K I (vel F H I) = F D N, erit triangulum F D C simile triangulo L K C; ac indè F D. D C :: K L. C K. item ob ang. F K N = ang. F H N = ang. X D C; erunt triangula X D C, N K C sibi quoque similia, proindeque D C. C X :: C K. C N. quapropter erit ex æquali F D. C X :: K L. C N. vel permutando F D. C K :: C X. C N; hoc est F D. T (vel R. S) :: C X. C N; quod faciendum erat. *Constr. &.*

Advertendum est autem, quod datum punctum F in recta P N indefinitè protensa variè statui potest; vel nimirum inter puncta P, N; vel extra illa partes ad alterutras. item quòd in istorum casuum singulo quoque recta I K (conditione gaudens præstitutâ) plurifariam duci potest; ut antehac inculcatum; unde plures emergent solutiones. at quoad omnes casus persimilis erit constructio, nec ferè diversa demonstratio. quare cur plura?

VIII. Proponatur jam circulus reflectens (is qui præ oculis, cujus

centrum C) datáque sint duo puncta A, X; reperiendum est in circumferentia punctum aliquod, à quo ducta ad A, X rectæ, altera sit alterius reflexa. ‖ Hoc ita perficimus:

Fig. 92, 93. Conjungantur rectæ A C, X C, & fiat (seorsim) ang. $\varkappa = \frac{1}{2}$ ang. A C X, & in ξ erunt anguli; sumpto libere puncto π ducatur π V ad $\xi\pi$ perpendicularis alterum crus secans in V, & in V π protracta capiatur $\pi\gamma = \pi$V, tum dividatur γV in φ, ut sit $\gamma\varphi$. πV :: XG . CA, perque punctum φ trajiciatur $\varkappa\xi$ sic ut sit $\varkappa\xi$. $\varkappa$v :: CX . CN. denique fiat angulus X C N æqualis angulo $\xi\varkappa$v; erit punctum N quale desideramus. Nam ducantur X N, ξv, & fiat ang. C N G = ang. $\varkappa$vγ, adsumatúrque P G = P N; & connectatur X G. liquet jam trangula X C N, $\xi\varkappa$v similia fore, nec non ipsa C N F, $\varkappa\gamma\varphi$; & ipsa X P F, $\xi\pi\varphi$, ipsáque denùm X F N, $\xi\varphi$v assimilari. quare P F . X F :: $\pi\varphi$. $\xi\varphi$, & X F . F N :: $\xi\varphi$. φV, & ex æquo P F . F N :: $\pi\varphi$. φV. & antecedentes duplando 2 P F . F N :: 2 $\pi\varphi$. φV. componendóque 2 P F + F N . F N :: 2 $\pi\varphi$ + φV . φV. hoc est G F . F N :: $\gamma\varphi$. φV (hoc est) :: X C . C A. ducatur jam N L ad X G parallela; quare est ang. L N G = ang. G = ang. X N G; & X G (X N), N L :: G F . F N :: X C . C A. porro fiat ang. L N H = ang. X C A; & H N protracta ipsi C A occurrat in M; estque propterea triangulum H N L simile triangulo H C M; idcircóque H C . C M :: H N . N L. ducatur denuò tangens N Q, estque tum ang. P N Q = rect — C N P = rect — $\varkappa$V π = ang. $\varphi = \frac{1}{2}$ X C A; vel 2 ang. P N Q = ang X C A = ang L N H. Verum erat prius 2 ang. X N F = ang. X N L. ergo 2 ang X N F — 2 ang P N Q = ang X N L — ang. L N H. hoc est 2 ang X N Q = ang. X N H. ergo tangens N Q bisecat angulum X N H; indeque consectatur fore rectam H M ipsius X N reflexam; ac ideò esse X C. H C :: X N. H N, atqui fuit priùs H C. C M :: H N. N L quare jam erit ex æquo X C, C M :: X N. N L (hoc est etiam è præmonstratis) :: X C. C A. unde C M = C A. quapropter H M, ipsius X N reflexa transit per A: Quod propositum erat efficere. ‖

Lem. præced.

VIII. Hujusce *Problematis* ità generaliùs proposui varii quidem casus sunt (etenim vel data puncta jacent ambo extra circulum reflectentem; vel utrumque positum est intra circulum; vel unum intra jacet, alterum extra; quinetiam in horum casuum unoquoque pluries conficitur negotium) ast ubique non absimilis erit constructio, sanè nimius essem; meámque pariter ac vestram patientiam macerarem omnes intricati *Problematis* nodos evolvendo; sufficerit ejusce specimen aliquod protuliisse.

IX Adnota-

IX. Animadvertimus tantùm quòd ex *Problematis* hujusce naturâ constructioneque propositâ satis intuenti constabit (utique sicut in *Hypothesibus* antehac tractatis uberiùs est declaratum) duorum tantùm ad eandem axis partes incidentium reflexos ad unum sese punctum decussare, nam aliorum unius (qui fabricandi potest dari) vel alterius reflexi per ejusmodi punctum transeuntes ad alteris partibus incidentes pertinebunt. || Ex his quadantenus elucescit datis puncti radiantis, oculique positione designari potest linea quævis, in qua dicti puncti species apparebit; incumbit proximè punctum in ea præcisum determinare, ad quo eadem consistit. eo spectat hoc Theorematon.

X. Ab eodem quocunque puncto A manantes duo radii A N, A R in circuli reflectentis peripheria præter illum arcum N R (qui incidentiæ punctis interjacent) intercipiant arcum P S; eorum verò reflexi intercipiant arcum $\sigma\sigma$; erit arcus $\sigma\sigma$ æqualis Summæ vel differentiæ dupli arcûs N R, & arcûs P S. Nam (1) in prima figura; est P S + S R + R N = P N = N σ = $\sigma\sigma$ + σ R — R N; ergò, pares hinc indè S R, & σ R subducendo, erit P S + R N = $\sigma\sigma$ — R N. proindéque P S + 2 R N = $\sigma\sigma$. (2). in altera figura; erit P S + S R — R N = P N = N σ = R N + R σ — $\sigma\sigma$, quarè rursùs æquales auferendo S R, R σ manebit P S — R N = R N — $\sigma\sigma$ unde transponendo erit $\sigma\sigma$ = 2 R N — P S. Fig. 95, 96.

XI. Etiam hoc *Lemmation* adscribemus: Bisecetur recta N P in E; & ubivis sumatur punctum A; erit $EA = \frac{PA \pm NA}{2}$. Nam $EA = \frac{PN}{2} \pm AN = \frac{PN \pm 2AN}{2} = \frac{PA \pm AN}{2}$. Fig. 94.

XII. Exhinc, ut propositum citiùs attingamus, Supposito radios A N, A R (quoad casum præsentem) sibi quàm proximos incidere, punctum designabimus ad quod ipsorum reflexi N σ, R σ concurrunt; dicimus utique si dicti reflexi concurrant ad Z; bisectis subtentis N P, N σ in E, & F; fore F Z . Z N :: E A . N A. || Nam quoniam arcus N R, P S ex hypothesi sunt indefinitè parvi (seu minimi) se habebunt ut fuæ subtensæ; nec non idem de arcubus N R, $\sigma\sigma$ dici potest. igitur arc. P S . R N :: P S . R N :: P A . R A. (hoc est ob R A, N A nihil, ex eadem hypothesi, differentes) :: P A . N A. ergò, bis componendo, erit P S + 2 R N . R N :: P A + 2 N A . N A. Fig. 95, 96.

hoc est $\sigma\varpi . RN :: PA + 2NA . NA$. est autem arc $\sigma\varpi . RN$ :: subtensa $\sigma\varpi . RN :: \varpi Z . ZR :: \varpi Z . ZN$. ergo $\varpi Z . ZN :: PA + 2NA . NA$. & componendo $\varpi N . ZN :: PA + 3NA . NA$ & antecedentes subduplando $FN . ZN :: \frac{PA + 3NA}{2} . NA$. denique dividendo $FZ . ZN :: \frac{PA + NA}{2} . NA$. est autem $EA = \frac{PA + NA}{2}$, ergò tandem est $FZ . ZN :: EA . NA$. Q. E. D.

XIII. Hinc colligitur punctum Z esse locum ipsissimum, circa quem puncti Z imago consistit; oculi respectu in reflexo $GN\varpi$ constituti, tanquam ad O. etenim superiùs nec semel argumentis, ut mihi videtur, admodum luculentis adfirmatum est (ut jam ad instar regulæ legisve ratum, fixúmque censeri queat) isthic imaginem versari, ubi propiorum incidenti principali (hoc est ei cujus reflexus oculi centrum transiens axis Optici vicem subit) radiorum reflexi principalem illum reflexum intersecant; itaque circa Z in hoc casu versatur.

Fig. 95, 96.

XIV. Et hoc argumentatione collegi, non illâ quidem incertà vel ambiguâ, sed nec ad *Geometrici* rigoris amussim præ illa quam in præcedentibus usurpavi (quanquam & hæc è cognatis fontibus profluxerit) adeò exactâ; concisâ tamen, & facili, talique quæ conclusionis adsertæ causam apprimè detegit. Enim verò si pleraque cuncta, quæ se oggerunt huc attinentia, minutatim ac morosè persequi vellem, immane quantum tædii (commodo vestro fortassè non tanto) mihimet accerserem, & temporis plurimum vestri pariter ac mei exhaurirem. suffecerit itaque jam, & posthac in reliquis Hypothesibus sufficiat, viâ quàm brevissimâ (modò tamen certissimâ) metam attingere. De convexis hactenus; ad concava proximè nos conferemus, aliquanto breviùs exponenda. ||.

Lect.

LECT. X.

I. IN postrema Lectione quod spectavimus punctum circuli convexo alluxit; nunc partes concavas irradians aliud, at magis ἐν τέπῳ, contemplabimur. & quidem casuum præcipuorum diversitatem imprimis distinguemus. Nempe radiet punctum A in circulum reflectentem, cujus centrum C; connexaque recta AC protendatur indefinitè; quo posito.

II. 1. Incidat radius AN; & sit AN = AC; erit ipsius AN reflexus, puta Nα, ad AC parallelus. Fig. 97.

Hoc è suprà generatim ostensis constat; & facilè jam patet, connexâ CA. etenim est ang. ACN = ANC; ob AC, AN, ex Hypothesi pares; & ang. ANC = αNC, propter reflectionem; adeóque ang. ACN = αNC; unde sunt AC, Nα sibi parallelæ.

III. 2. Incidat radius AM major ipsâ AC; ejus reflexus (puta Mα) cum axe directè procedens conveniet ultra centrum, respectu puncti A; (hoc est centrum C puncto radianti, concursuique interjacebit). Fig. 98.

Nam ob AM $\sqsubset$ AC, erit ang. ACM $\sqsubset$ AMC = CMα. ergò ang. BCM + CMα $\sqsupset$ ang. BCM + ACM = 2 rect. quare Mα, CB convenient infra CM ad partes αB; velut ad K.

IV. 3. Incidat radius AR; & sit AR minor ipsâ AC; ejus reflexus, puta Rα, axi retrò protractus occurret. (hoc est ut radians centro, concursuique sit interjectum). Fig. 99.

Nam hic ob AR $\sqsupset$ AC; erit ang. ACR $\sqsupset$ ang ARC = ang. αRC. quapropter ang. DCR + αRC $\sqsubset$ 2 rect. unde patet ipsas DC, αR portractas infra CR concurrere.

V. Horum

V. Horum casuum primus ad unum duntaxat ab una axis parte radium pertinet, qui reliquos aliis casibus convenientes medius disterminat. Fig. 101. de posteribus itaque duobus separatim paullò dispiciamus, Sit jam itaque primò AC = AG = Aγ, unde quilibet incidens cavo GBγ radius (ut AN) major erit quam AC, hujus itaque reflexus axem secet puncto K, dico, si semidiameter OB dividatur in Z, ut sit CZ. Fig. 100. ZB :: AC. AB, fore CK ⊏ CZ. etenim ob angulum ANK bisectum, erit AC. CK :: AN. NK. vel permutando AC. AN :: CK. NK, est autem AC. AB ⊐ AC. AN ergo AC. AB ⊐ CK. NK ⊐ CK. BK. ergò cùm sit, ex hypothesi, CZ. ZB :: AC. AB, erit CZ. ZB ⊐ CK. BK. componendóque CB. ZB, ⊐ CB. KB, unde ZB ⊏ KB, seu CZ ⊐ CK: Q. E. D.

VI. Hinc punctum Z est limes infra quem, Versus centrum, nullus reflexus axem intersecat.

Coroll. Hinc si puncta Z, ζ sint limites punctorum A, α (quorum A remotius) erit CZ ⊏ Cζ.

Nam BC. AC ⊐ BC. αC. componendóque AB. AC ⊐ αB. αC. hoc est ZB. ZC ⊐ ζB. ζC. vel compositè CB. ZC ⊐ CB. ζC. ergò ZC ⊏ ζC.

VII. Quinetiam erit in hoc casu, ANq — ACq. CNq :: AC. CK. Nam ducatur K H ad CN parallela, protractæ AN occurrens in H, & connectatur CP, & eodem planè modo quo superius (in iis quæ circa convexas partes attigimus) ostendetur fore AN × NP. CNq :: AK. CK. unde divisim erit AN × NP — CNq. CNq :: AC. CK. est autem AN × NP = ANq — AN × AP = ANq — : ACq — CNq = ANq + ACq + CNq, adeóque AN × NP — CNq = ANq + ACq. ergò demum erit ANq — ACq. CNq :: AC. CK: Q. E. D.

Notetur; si fuerit AC minor semisse semidiametri circuli reflectentis, quòd punctum A duos focos habebit ad easdem centri partes, quorum alter ad partes D, alter ad B pertinebit; sin AC major fuerit istâ Semisse, focis qui ad diversos vertices B, & D pertinent, centrum C interjacebit.

VIII. Etiam hoc interseram *Theorema*, præmissis conforme: Si fiat 2 CK. CN :: CN. F; itémque 2 CA. CN :: CN. E; &

& demittatur N Q ad A C perpendicularis, erit C Q = F — E. ‖ Nam (ut suprà) est C A. C K :: F — E. E ‖ item hic erit A Nq — A Cq = 2 AC × CQ + CNq. adeóque 2 AC × CQ + CNq. CNq :: A C. CK. hoc est, (ob CNq = 2 AC × E.) 2 AC × CQ + 2 AC × E. 2 AC × E :: AC. CK. hoc est CQ + E. E :: AC. CK. quare dividendo CQ. E :: AC — CK. CK :: ergo F — E = CQ : Q. E. D.

IX. Porrò, si duorum quotcunvis radiorum AN, AR reflexi NK, RL axem secent punctis K, L; erit CK. CL :: ARq — ACq. ANq — ACq. Nam ob CK. AC :: CNq. ANq — ACq. & AC. CL :: ARq — ACq. CNq. erit ex æquo perturbatè CK. CL :: ARq — ACq. ANq — ACq.

X. Hinc si radius AR sit ipso A N obliquior; erit CK ⊐ CL. Nam ARq — ACq ⊐ ANq — ACq.

XI. Hinc palam est reflexos N K, R L sese prius quam axem decussare.

XII. Accipiantur porrò bini pares arcus N R, R X, & incidentium A N, A R, A X reflexi cum axe conveniant punctis K, L, M; dico spatium L M, obliquiorum occursibus interjectum, majus esse spatio L K, quod rectiorum continetur occursibus. Nam è suprà monstratis constat esse A Nq + A Xq ⊐ 2 A Rq. proindeque forte A Nq + A Xq — 2 ACq ⊐ 2 ARq + 2 ACq. ac indè ANq. — ACq. ARq — ACq ⊐ ARq — ACq. AXq — ACq. hoc est CL. CK ⊐ CM. CL. vel CM. CL ⊏ CL. CK. quare CM + CK ⊏ 2 CL. & ideò LM ⊏ KL. Fig. 202.

XIII. Hinc rectius ingruens lux à reflectione versus axem condensatior evadit.

XIV. Quidni demùm ex his inferatur, visibilis A imaginem circa reflexorum metam Z, oculo ulpiam in A Z constituto, apparere?

XV. Adversatur saltem (id quod experiendo deprehenderetur) oculo ulpiam in Z, B collocato confusionem apparentiam objici; quippe cum

cùm eum tunc reflexi convergentes appellant; & imago distinctior Z post oculum consistat: quin ejusmodi complures apparentias observabitis ipsi si lubet, & ex his deducetis ||

XVI. Præterea, *dato oculi centro, velut O, quomodo designandus sit ipsum pervadens reflexus* (ceu N ϖ) è suprà tractatis aliquatenus
Fig. 103. adparet. nec inibi generaliùs expositum *Problema* libet hic reponere.

XVII. Quinetiam antedicta recensendo constabit, si bisecentur subtensa PN in E; & subtensa N ϖ in F; ac fiat FZ.ZN::EA.NA; radiantis imaginem, visûs O respectu, circa punctum Z consistere. planè similis est discursus, quorsum κρακύζειν. ||

XVIII. Superest tantùm, ut de posteriore quem innuebamus casu paucula subdamus. Eò, ponatur AC = AG = Aγ; indè quilibet incidens cavo GBγ radius ipsâ AC minor erit; sit talis alicujus AN reflexus N ϖ; qui nempe retrò productus cum axe conveniet; puta ad K. Etiam hîc præcedentibus conformis deprehendentur, & suppari demonstrabuntur modo; qualia sunt nempe

XIX. AC.AN::CK.KN.

XX. ACq—ANq.CNq::AC.CK.

XXI. Radii AR ipso AN obliquioris reflexus cum axe concurrat in L; erit CK.CL::ACq—ARq.ACq—ANq. ac indè

XXII. CK⊐CL.

XXIII. Incidentium rectiorum (pares, ut superiùs, arcus in reflectente sumendo) reflexi concursus habent à se minoribus intervallis disjunctos. hæc, inquam, & alia quoad reliquos casus præmonstratis conformia, vel agnata persimili quoque quoad hunc casum methodo comprobantur. quare pluribus tempero; sed enim id quod ubique præcipuum etiam hic exertiùs ostendam; præmisso tamen hoc, ad sequentia quoque concidenda non inutili, *Lemmatio:*

XXIV. Detur recta BC; in ea protracta designandum est punctum,
Fig. 104. velut Z; ità ut BZ ad CZ datam obtineat rationem, puta I ad R. || Id facilè sic exequimur, ||

1. Si

1. Si fuerit I ⊏ R; fiat I — R. R :: BC. CZ; quare componendo erit I. R :: BZ. CZ. ergò factum. Fig. 105.

2. Sin I ⊐ R; fiat R — I. I :: BC. BZ. ergò rursus componendo R. I :: CZ. BZ. vel inversè, I. R :: BZ. CZ.

XXV. Fiat jam CA. AB :: CZ. BZ; Dico punctum Z esse metam, citra quam (respectu centri C) nullus reflexus axem decussabit; hoc est præmissis insistendo, fore CK ⊏ CZ.

Nam ducatur NT circulum contingens ad N. erit ergo NK. NA :: KT. AT ⊐ BK. AB. quare NK. NA + AB. BZ ⊐ BK. AB + AB. BZ = BK. BZ. est verò NK. NA :: CK. CA. & AB. BZ :: CA. CZ. ergò CK. CA + CA. CZ ⊐ BK. BZ. hoc est CK. CZ ⊐ BK. BZ. vel permutando CK. BK ⊐ CZ. BZ. unde dividendo CB. BK ⊐ CB. BZ. adeóque BK ⊏ BZ. unde liquet propositum.

XXVI. Exhinc (ut in casibus antè pertractatis) consectatur ejusmodi punctum Z esse locum ipsissimum imaginis punctum A exhibentis oculo, puta O, in axe CA constituto; patétque quàm longè passim ab Opticis; nominatim à novissimis *Stevino*, *Hobbio*, *Fabrioq*, in eo assignando loco aberratur; quorum ex sententia versatur is ad punctum (puta Q) tanto semotum à vertice B intervallo, quanto radians A ab ipso B distat. id quod præterquam quòd nullâ verisimili ratione nititur (imò rationi prorsus adversatur; cùm nullus omnino radius oculum ingrediatur tanquam à puncto Q proveniens) experientiâ facilimè refutatur. Nam si tanquam circa punctum A accensa candela speculo cavo GBγ exponatur, oculo velut ad O sito longè majori distans intervallo conspicietur, quàm ipso BQ, quod ipsam AB exæquat. quinimò tantillo versus centrum illum adducendo non æquali distantiâ, sed admodum majori videbitur elongari; tantâ circiter ad sensum, probabilémque conjecturam; quantam proportio requirit à nobis præstituta. quo circà discursus noster experientiæ suffragio constabilitur.

XXVII. Quod demum attinet ad locum imaginis respectu visûs extra radiationis axem positi; determinatur is eodem ac in casibus antecedaneis modo; bisecando scilicet ipsas NP, Nπ punctis E, F; faciendóque EA. AN :: FZ. ZN. Adnotandum saltem in rectioribus reflexis imaginem extra circulum consistere; sed in obliquioribus intra illum, nempe si fuerit AE ⊏ AN punctum Z ultra axem Fig. 106.

CB existet; sin AE ⊐ AN, punctum Z versus ∞ existet; sin AE = AN; concursus infinitè distabit, seu proximus reflexus ipsi N ∞ parallelus erit.

Not. ductâ AQ ad CB perpendiculari, si AE = AN; erit $AN = \sqrt{\frac{AQq}{3}}$. Nam AQq = AP × AN = 3AN × AN = 3ANq; itaque punctum N, istos casus disterminans, facilè designatur. Fig. 106.

Rationem ipsi tantillùm attendentes perspicietis; mihi sanè cunctas evolvendo minutias non animi satis, non otii suppetit.

XXVIII. Juvabit his unam, loco forsan opportuniore prætermissam, observatiunculam attexere. Si fuerit Z radiantis A Imago, vicissim erit A radiantis Z Imago. è dictis quoad speciales casus facilè cernitur hoc consectari. quin & hinc generatim verum apparebit satis: Si fuerit Z ipsius A imago, tantum unus idcircò ab A manantium inflexus per Z transibit. (hoc imagini proprium esse sæpiùs in decursu inculcata satis arguunt, superque) quare reciprocè solus unus ab Z manantium inflexus per A transibit (nam si duo tales per A transire dicantur, etiam indè duo per Z transibunt, contra hypothesin) erit igitur A ipsius Z imago. Merebatur hæc (compendio bene serviens, & casus inter se varios conferentibus affundens lucem) observatio generalibus intertexi; nisi quòd non omnia se nobis statim produnt; & quædam in abstractione summa non ità facilè vèl explicari possunt, vel comprobari.

A Catoptricis jam aliquando manum. quæ contentus ità quadantenus promovisse, haud disparia (certè magis nova, minimèque protrita) circa refractiones sphæricas, seu circulares, attentabo.

Lect.

LECT. XI.

I. *Catoptricâ circulari defunctus ad Dioptricam promovemur*; quorſum incidentium quotcunque refractis unâ ſimulo perâ delineandis, adeóque refractionum ſymptomatis organicè pertentandis modum imprimis exponemus, præ cæteris, opinor expeditum. Seorſim ad v γ æqualem diametro (N G) circuli refringentis deſcribatur circulus v ϖ γ. item habeat v γ ad S γ rationem illam, quæ refractiones determinat (illam autem deinceps, ut antehac, conſtanter nuncupabo rationem I ad R) & ſuper diametro S γ deſcribatur quoque circulus S H γ. Incidat jam radius quilibet M N P, cui conveniens deſignandus eſt refractus. ut hoc aſſequamur, circulo adpoſito à V adaptetur v ϖ = N P; & centro γ per ϖ deſcriptus circulus ſecet circulum S H γ in H; connexáque γ H circulum v ϖ γ interſecet in ξ. demùm connexâ v ξ, circulo N P G accommodetur N X = v ξ; erit N X ipſius N P refractus. Etenim (ductis G P, G X) eſt γ H. γ ξ :: (γ S γ v :: :) I. R. hoc eſt γ ϖ. γ ξ :: I. R. hoc eſt G P. G X :: I. R. cùm itaque ſint ipſæ G P, G X recti ſinus angulorum G N ϖ, G N X (quorum G N P eſt angulus incidentiæ) liquet propoſitum. Fig. 107. 108.

II. Ad ipſa *Symptomata* progrediamur exponenda radiis ad circulum refractis competentia; quorum illa pro more primò pertractabimus, quæ radianti puncto conveniunt ad infinitam quaſi diſtantiam poſito, ſeu parallelos ad ſenſum radios ejaculanti. Quocirca per circuli refringentis Centrum C punctúmque de longinquo radians protendatur recta A C Z; tum fiat B Z. C Z :: I. R; nec non dividatur C Z in F, ut ſit F Z. F C :: I. R; & centro F per Z deſcribatur circulus E G Z. his peractis, accipiatur jam quilibet ad A C parallelus M N P (convexis incidens an concavis partibus perinde fuerit) dico ſi recta N C (ab incidentiæ nempe puncto per refringentis centrum ducta) circulo E G Z protracta occurrat in G; & Fig. 109.

in axe capiatur CK = CG, connectatúrque recta NK, fore NK ipſius MNP refractum. Connectantur enim rectæ FG, BG; & quoniam eſt BZ.CZ :: (I.R ::) FZ.FC; erit permutando
Fig. 109. BZ.FZ :: CZ.FC. dividendóque BF.FZ :: FZ.FC. itaque patet triangula BFG, GFC (latera ſcilicet habentia circa communem angulum GFC proportionalia) ſimilia fore. quamobrem erit BG.GF :: GC.CF. ſeu permutatim BG.GC :: GF.CF. hoc eſt BG.GC :: FZ.CF :: I.R. verùm in triangulis BCG, NCK eſt BC = CN, & CG = CK; & ang. BCG = NCK; adeóque BG.GC :: NK.CK. quare erit quo-
* Lect. 3. numero. 10. que NK.CK :: I.R. ergò, *ſecundum generatim antehac oſtenſa, liquet NK ipſius MN refractum exiſtere.

Coroll. Adnotetur eſſe triangula BFG, GFC ſimilia; ac eſſe BG.CC :: I.R; & ang. BGF = GCF; & eſſe BF, FG, FC ÷÷ &c.

III. Ex hoc (ſanè pulchro, perutilique *Theoremate*) cùm particularis exoritur methodus hujuſmodi quotcunque refractos expeditiſſimè ſeu delineandi, ſeu computandi; tum ipſorum præcipua *ſymptomata* facilimè diſcernuntur ac demonſtrantur. qualia ſunt, quæ in ſubjectis exhibentur *Corollariis*.

IV. Patet hinc punctum Z eſſe limitem ultra quem (reſpectu centri) nullus axem interſecat refractus; ſeu perpendicularis ipſius AB (vel ei ſaltem quàm proximè adjacentis radii) refractum ad Z terminari. quia nimirum eſt CZ ⊏ CG, vel CR.
Fig. 110.

V. Conſequitur etiam, ſi duorum incidentium MN, QR (quorum QR ſit obliquior) refracti conveniant cum axe punctis K, L, fore
Fig. 111. CK ⊏ CL. Etenim ſi rectæ NC, RC ad circulum refractarium (ità circulum EGZ meritò ſubinde nominabimus) producantur, ut ipſum ſecent punctis G, H, liquet eſſe CG ⊏ CH; adeóque CK ⊏ CL. Hinc

VI. Ad eaſdem partes incidentium refracti ſeſe priùs interſecant quàm axem; (veluti puta refracti NK, RL ſeſe decuſſant in X.)

Fig. 111. VII. Quinetiam, ſi in primo caſu per centrum C ducatur recta VI ad BZ perpendicularis, dictóque circulo refractario occurrens ad I; & fiat CY = CI, patet punctum Y eſſe limitem refractionis

cite-

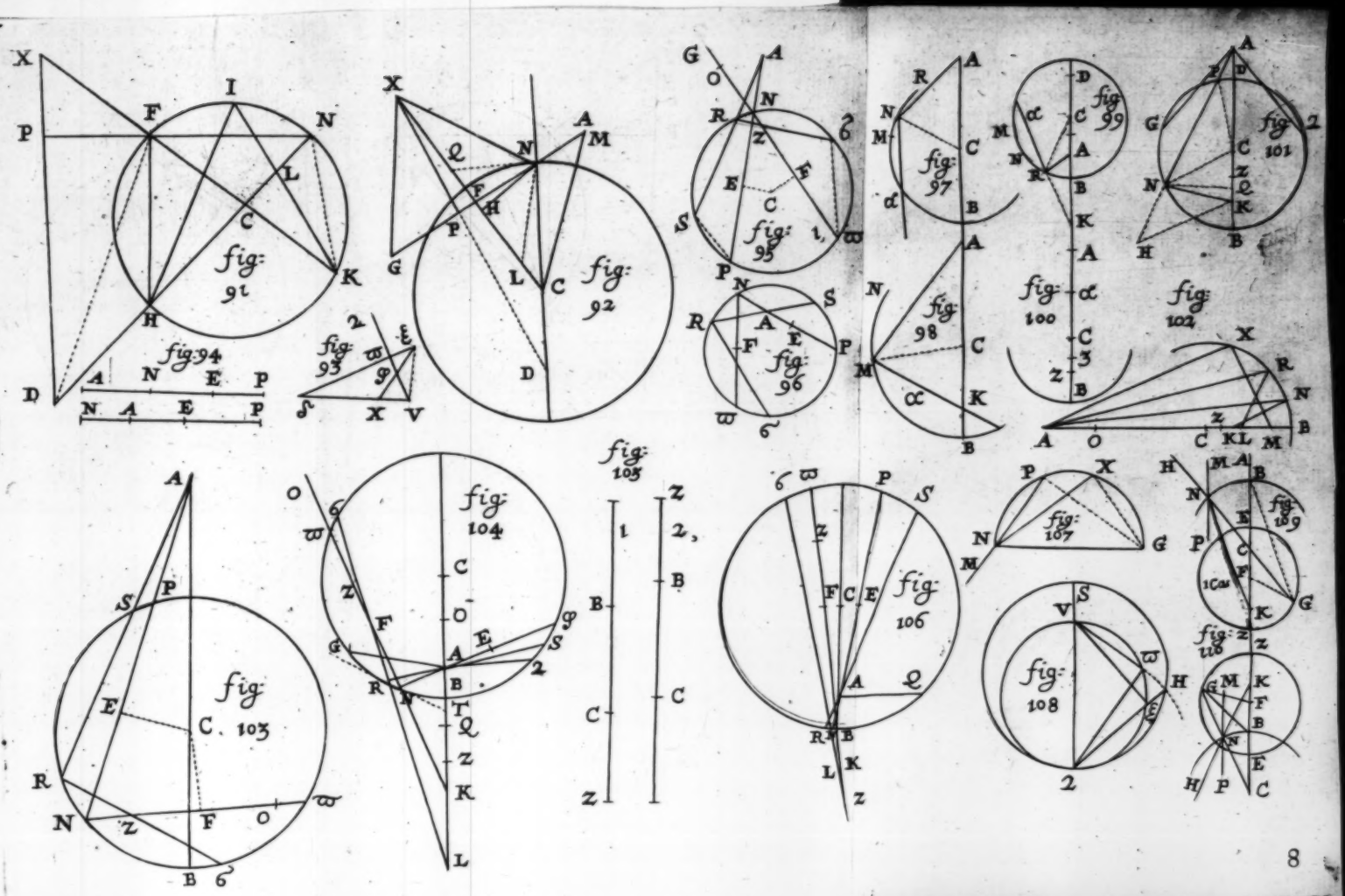
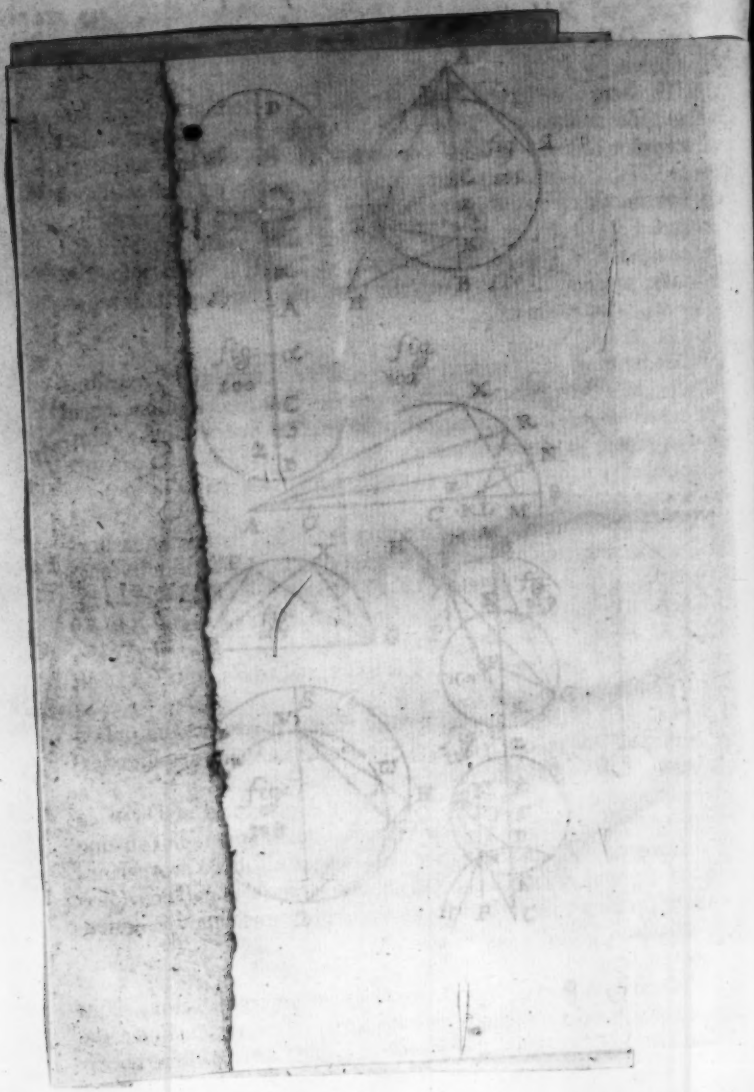


fig: 91
fig: 92
fig: 93
fig: 94
fig: 95
fig: 96
fig: 97
fig: 98
fig: 99
fig: 100
fig: 101
fig: 102
fig: 103
fig: 104
fig: 105
fig: 106
fig: 107
fig: 108
fig: 109
fig: 110



circulum; aut enim connexa VY refractus cadet radii, ceu TV, circulum refringentem contingentis.

VIII. Item, in secundo casu si recta CVI circulum EGZ tangat in I, & adsumatur CY = CI, erit punctum Y citimus alter refractorum limes. Etenim connexa VY refractus erit incidentis (puta VT) ad BC paralleli, qui certè punctorum obliquissimus erit hujusmodi refractionem patientium. quum enim (*è præmissis) connexâ FI, sit FI. CF :: I. R. hoc est sinus rectus anguli FCI (vel anguli CVT) ad sinum totum, ut I ad R, nullus ipso TV obliquior medium BNV penetrabit; at ipse quicunque talis repercutietur; velut φ ↓ in φ ξ. Fig. 113. *Lib. 3. num. 7.

IX. Cæterùm hic (tametsi præter ordinem non nihil, extráque suum locum) egregiam quandam & præsertim notabilem istius, quem nuncupavimus, refractarii circuli, proprietatem interseremus: Omnium à puncto B promanantium, & à circuli EGZ cavis partibus refractionem patientium (juxta casus præmominatos respectivam) refracti per punctum C transibunt.

Nam ejusmodi quilibet incidat radius BG, & (stantibus quæ præstructa præmonstratáque sunt) triangula BGF, GCF similia sunt; angulúsque BGF par angulo GCF; itémque FG. CF :: I. R; est autem FG ad CF, *ut Sinus anguli* GCF *hoc est anguli* BGF *ad Sinum anguli* CGF. *ergò Sinus anguli* BGF *(qui est angulus incidentiæ) ad Sinum anguli* CGF se habet, ut I ad R. ergo CGc est refractus ipsius BG: Q. E. D. Fig. 113, 114.

Nota. Si qui ad convexas hujusce circuli partes incidunt, ità reflectantur, ut perpetuo Sinus anguli incidentiæ ad Sinum anguli reflexi se habeat ut I ad R, etiam reflexi per C transibunt.

Hinc habetur unum (quoad hos casus) è præcipuis in *Dioptrica* desideratum, perquam utile, Superficies simplicissima radios ab uno puncto procedentes ità refringens, ut tanquam ab altero proveniant; id quod demonstrationis adductus commoditate *Corollarii* loco (licèt ad aliam pertinens hypothesin) hic apponere non dubitavi, redeamus è diverticulo.

X. Notandum porrò, quòd diversos refringentes circulos, iisque competentes, modo præstituto determinatos, refractarios adsumendo, rectæ CB, EZ, CE, CZ, CF easdem in uno, quas in altero quovis proportiones observant; id quod facilimè demonstratur; & satis elucescit

crescit ex eo; quod earum omnium ad se proportiones in eodem ubique modo fundantur in una ratione I ad R. verbis, & Schematis effingendis parco. Pro sequentibus hæc adjungo *Lemmata*.

XI. 1. Sint tria quanta A, B, C (quorum maximum A) se deinceps æqualiter excedentia; sint etiam altera totidem M, N, O, & sit A. B :: M. N; ac B, C :: N, O; dico fore quoque tria M, N, O in ratione continua *Arithmetica*. Nam ob A. B :: M. N. erit divisim A — B. B :: M — N. N, item ob B. C :: N. O. erit per rationis conversionem B. B — C :: N. N — O. ergò erit ex æquo A — B. B — C :: M — N. N — O. itaque cùm sit ex Hypothesi A — B = B — C; erit etiam M — N = N — O: Q.E.D.

XII. 2. In circuli quadrante Z Q trium arcuum Z G, Z H, Z I Sinus recti F α, F ζ, F γ æqualiter crescant (ut nempe sit α ζ = ζ γ) dico fore G α — H ζ ⊐ H ζ — I γ.

Fig. 115.

Nam ducatur subtensa G I ipsam H ζ secans, in X; & sint X R, I S ad F Q parallelæ; patet ipsas G R, X S æquari hoc est fore G α — X ζ = X ζ — I γ; unde liquidum est esse G α — H ζ ⊐ H ζ — I γ: Q.E.D.

XIII. 3. Sunto concentrici bini circulorum quadrantes F Z X, F ζ ξ; & ad F Z parallela ducatur recta quævis L G γ; circulos intersecans punctis G, γ; dico fore F Z — L G ⊏ F ζ — L γ.

Fig. 116.

Nam connexa F G circulum ζ γ ξ producta secet in T; connectantúrque subtensæ Z G, ζ T (hæc ipsam L γ secans in S) Patétque jam rectas Z G, ζ T parallelas esse; adeóque quadrangulum Z G S ζ fore parallelogrammum; unde G S = Z ζ; adeóque F ζ — L S = F Z — L G. ergo F ζ — L γ ⊐ F Z — L G: Q.E.D.

XIV. Sint jam tres radii paralleli M N, Q R, V X, à se distantes æqualiter (hoc est ut ductis N ν, R ϱ, X ξ ad axem A C perpendicularibus sit X ξ — R ϱ = R ϱ — N ν) & ipsorum refracti cum axe conveniant punctis K, L, O; erit obliquiorum concursibus interjectum spatium O L majus spatio L K, quod à rectiorum occursibus continetur.

Fig. 117.

Nam ducantur N C, R C, X C circulo refractario occurrentes punctis G, H, I; & ad has à refractarii centro F ducantur perpendiculares F α, F ζ, F γ; & quoniam triangula C X ξ, C F γ similia sunt; erit X ξ. C X :: F γ. C F. item simili de causa, est C R (C X).

R ϱ

$R\gamma :: CF . F\zeta$; quapropter erit ex æquo $X\xi . R\gamma :: F\gamma . F\zeta$: non dispare ratione constabit esse $R\gamma . NV :: F\zeta . F\alpha$. ergò cùm tres $X\xi$, $R\gamma$, NV se æqualiter excedant, *etiam tres $F\gamma$, $F\zeta$, $F\alpha$ se æqualiter excedent; unde consequetur esse $C\alpha - C\zeta \sqsupset C\zeta - C\gamma$; nec non esse *$\alpha G - \zeta H \sqsupset \zeta H - \gamma I$; adeóque conjunctim $CG - CH \sqsupset CH - CI$; hoc est $CK - CL \sqsupset CL - CO$; hoc est denuò $LK \sqsupset OL$: Q. E. D.

*21 *hujus Lect. Hyp.*

*22 *hujus Lect.*

XV. Hinc apparet rectiùs illapsam refringenti lucem magìs inspissari, versúsque punctum Z in arctius redigi; maximam proinde vim ejus isthic exeri; focúmque combustionis (ad solem) ibi versari.

XVI. Consectatur etiam radios (hujusmodi saltem parallelos) quò rectiores oculo (cujus nempe superficies refractionis munus obeuntes aut Sphæricæ sunt, aut Sphæricas aliquatenus referunt) incidunt, eò faciliùs ab ipso readunari, seu propiùs recolligi.

XVII. Quinimò tandem ex his colligitur visibilis longinqui puncti speciem oculo, in axe posito, circa punctum Z apparere. Etenim ab ei adjacentibus partibus refracti cùm præ cæteris perpendiculares (vi proinde fortiores, & recollectu paratiores) neque non copiosiores affluunt, quibus ex causis imaginis positio dependet; ut jam sæpiùs admonitum: — ἐχθρὸν δέ μοι ἐστὶν Αὖτις ἀριζήλως εἰρημένα μυθολογεῖν. cæterùm hâc defunctus curâ tantisper respirabo. ||

Lect.

Lect. XII.

1. *Parallelos ad circulum refractionis positivum in contemplatione desinunt, præter alia præcipua symptomata, locum ultimo determinavi, quam isti repræsentant, imaginis, oculo in axe constituto.* res jam postulat ut eandem definiamus oculi gratiâ secùm collocati. verumtamen unam priùs haud inutilem adnectam observationem, ad præcedentia spectantem; hanc utique:

Fig. 118, 119. II. Si duo Segmenta N B R, v c, latitudines (vel subtensas) N R, V r æquales habeant, quorum V c r ad majorem pertineat circulum; hoc cum potentius aduret, tum objectum visibile clariùs atque distinctiùs exhibebit. Sint enim C, κ circulorum refringentium centra, & circuli iis competentes refractarii sint E G Z, ε γ ζ; horumque centra F, φ; tum parallelorum punctis N, v incidentium sint refracti N D, V δ; dico tum fore D Z ⊏ δ ζ. || Ducantur enim rectæ N C G, V κ γ; hisque perpendiculares rectæ F L, φ λ. estque C N. v ϖ :: C N. N P :: C F. F L. & v ϖ. κ v :: φ λ. κ φ. ergò (rationes sibi pares adjungendo) est C N. v ϖ + v ϖ. κ v :: C F. F L + φ λ. κ φ. hoc est C N. κ v :: C F × φ λ. F L × κ φ. est autem C N. κ v :: C F. κ φ :: C F × φ λ. κ φ × φ λ. quapropter erit C F × φ λ. F L × κ φ :: C F × φ λ. κ φ × φ λ; & idcirco F L × κ φ = κ φ × φ λ; indeque F L = φ λ. hinc consequetur fore C F — C L ⊏ κ φ — κ λ; nec non F Z — L G ⊏ φ ζ — λ γ; proindeque conjunctim C Z — C G ⊏ κ ζ — κ γ; hoc est C Z — C D ⊏ κ ζ — κ δ; hoc est demum D Z ⊏ δ ζ; exhinc lux ab arcu v c r magis constipata, (in spatium quippe restrictius δ ζ coacta) violentiùs operabitur; & à fonte magis ad punctum accedente promanare visa punctum radians distinctiùs exhibebit; id quod institutum fuit ostendere; quo rei passim observatæ, nec exilis in perspiciliorum constructione usûs ratio constaret. || In ordinem jam recidimus; ut puncti nempe longinqui locum apparentem indagemus, oculi respectu quomodocunque sitiquem in finem conficiendum venit imprimis hujusmodi *Problema*, rectum definiens in qua locus iste versatur:

23. II *Lect.*

III. Dato

III. Dato circulo refringente, punctoque quovis X, per punctum X ducatur recta, quæ sit incidentis ad datam positione rectam CB parallelè refractus.

Si punctum datum X ponatur in axe CB, facillimè perficitur ne- Fig. 120.
gotium, etenim si fiat R.I::CX.T, & centro X intervallo ipsam T adæquante describatur circulus refringentem intersecans in N, è præmissis admodum patet connexum NK per N incidentis ad BC paralleli refractum esse, quia scilicet est CX.XN::CX.T::R.I.

IV. Verùm extra casum hunc, & alios particulares nil huc attinentes, generatim conceptum *Problema* Solidum est, aut plusquam Solidum (ut ex analysi non difficilè perspiciatur) & certè viâ consuetâ, per lineas vulgò receptas, constructu perquam arduum & operosum; ità quidem ut licèt mihi non penitus incomperta sit methodus ejusmodi constructionem non unam moliendi, ægrè possim adduci, tantum ut ei temporis, tantum laboris impendam, quantum exposcit, sufficerit itaque modum indigitare, quo per lineam quandam sibi peculiarem, punctatim facili negotio designabilem, ità construi possit, ut una suam naturam ac indolem prodat. modus ille sic habet.

V. Connectatur recta CX, fiátque CX.CV::R.I; & per Fig. 121.
punctum V indefinitè protendatur recta FG, datæ CB parallela; tum è refringentis centro C rectæ quotcunque CI exeant, rectam FG decussantes punctis H; & centro X, intervallo rectas VH perpetuùm æquantè descripti circuli rectis CI occurrant punctis N; per hujusmodi puncta quævis linea transit, quam innuimus expositi *Problematis* Solutioni deserviturum, ejus scilicet, & dati circuli refringentis intersectio quæpiam incidentiæ punctum erit, ad quod per X ducta recta refringetur in aliquam ipsi BC parallelam; seu vicissim hæc in illam. Sit enim talis intersectio quævis N; & ducta NX ipsam BC secet in K, & sint NM, ac XT ad BC parallelæ. Estque tum CK.KN::(TX.XN::TX.VH::CX.CV::)R.I; unde secundum ostensa liquet NXK refractum esse ipsius MN; quod oportebat factum. Ità *Problema* διορθωτον utcunque licebit exequi, nec non ejusce qualitatem intueri; quot refracti per oculi centrum meent definire, singulósque reipsâ designare; quæ longiusculum esset sigillatim exponere. cum autem eâtenus imaginis locus

habeatur determinatus; succedit ut breviter etiam ipsissimum in singulis talibus refractis punctum obtinebimus; ad quod illa consistit, in cujus rei gratiam hæc quasi *Lemmata* præmittuntur.

Fig. 122.

VI. In circulo A N B, cujus centrum C, sint Semidiametro C A perpendiculares N E, R F; item Semidiametro C B sint perpendiculares N G, X H; sint autem C E, E F ipsis C G, G H proportionales; & arcus N R, N X indefinitè parvi, seu quasi minimi dictâ conditione præditi, dicimus arcum N R ad arcum N X rationem habere conflatam è rationibus ipsarum C E ad C G, & N G ad N E; vel esse arc. N R, N X :: C E × N G. C G × N E. Nam per N ducatur V T tangens circulum, ipsisque F R, H X occurrens punctis T, V. est itaque (propter Summam ex Hypothesi parvitatem dictorum arcuum) arc N R. C N :: N T. C N :: E F. E N. item C N. arc N X :: C N. N V :: N G. G H. quapropter erit arc N R. C N + C N. arc N X = (E F. E N + N G. G H = E F. G H + N G. E N =) C E. C G + N G. E N. hoc est arc N R. arc N X = C E. C G + N G. E N: Q. E. D. (vel arc N R. N X = C E × N G. C G × E N.)

VII. Sit jam radii cujusvis talis M N P, refringentem intersecantis punctis N, P, refractus N ϖ (refringentem nempe denuò secans in ϖ) huic autem indefinitè vicinus (& quasi proximus) adjaceat radius Q R S, cujus itidem refractus R σ (refringenti nempe rursus occurrens in σ), priorem N ϖ decussans in Z; bisecentur autem subtensæ N P, N ϖ punctis G, E: Dico rationem N Z ad G Z componi è rationibus N G ad N E, & C E ad C G.

Fig. 123, 124.

Nam ducantur rectæ C E (hæc ipsam R S quoque secans in F) & C G; nec non C I ad R σ perpendicularis; & in protracta C G sumatur C H = C I; & per H ducatur X Y ad N ϖ parallela, seu perpendicularis ad C H; unde est X Y = R σ; & arc N X = Y ϖ; & arc X Y = arc R σ; adeóque arc N R ± : σ ϖ = 2 arc N X. Estque præterea C G. C E :: R. I :: C I. C F :: C H. C F; adeóque permutatim C G. C H :: C E. C F. ergò (juxta præcedentem) est arc. N R. N X = N G. N E + C E. C G. ad hæc ob illam (quæ ponitur) arcuum N R, S P, ϖ σ exiquitatem, erit arc N R. ϖ σ :: subtensa N R. ϖ σ :: N Z. Z σ :: N Z. Z ϖ. ergò (inversè componendo, vel dividendo, tum & consequentes subduplando) arc N R. $\frac{\text{arc N R} \pm : \varpi\sigma}{2}$ :: N Z. $\frac{\text{N Z} \pm : \text{Z}\varpi}{2}$. atqui velut modò dictum)

arc

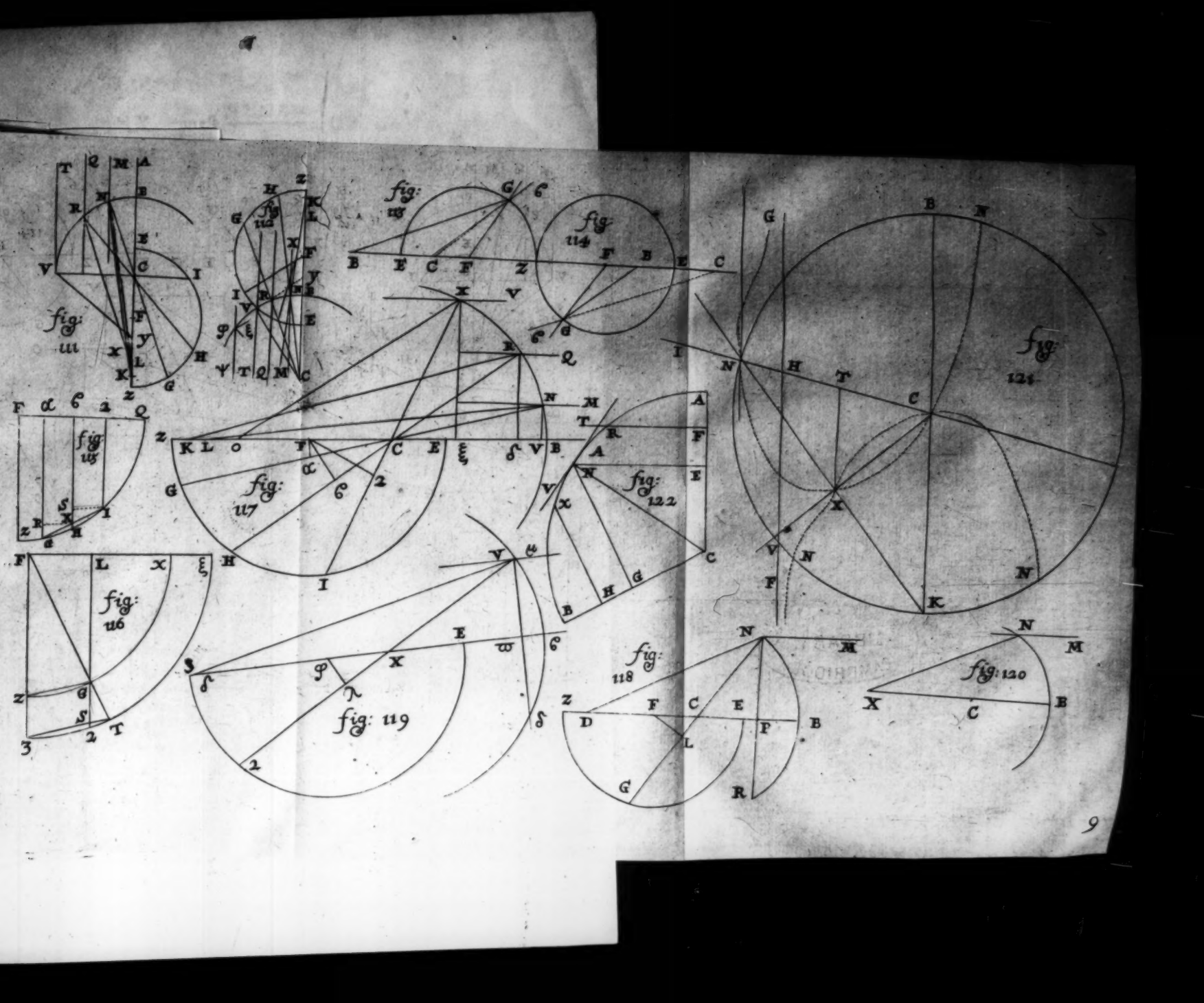
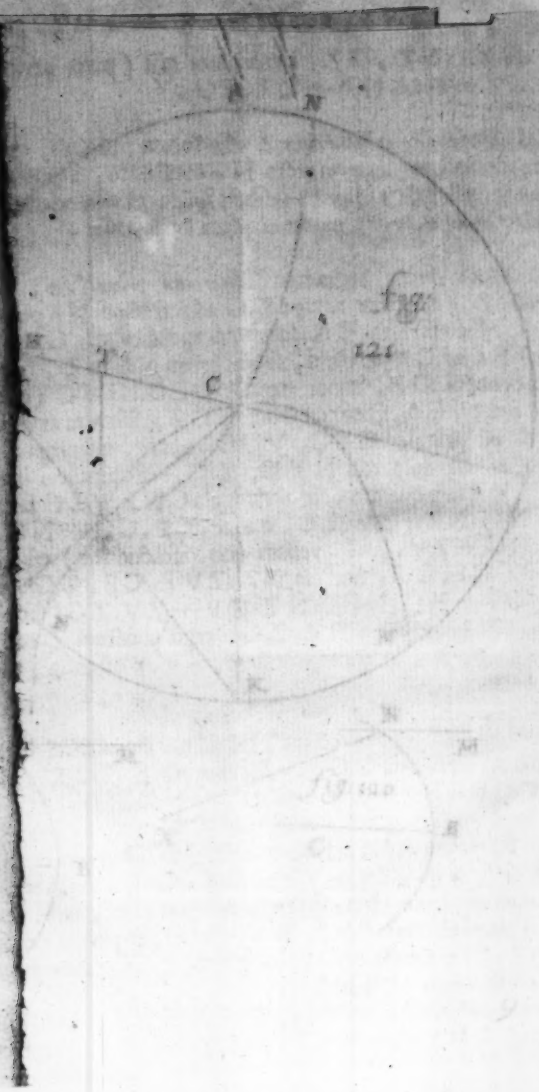


fig: 111
fig: 112
fig: 113
fig: 114
fig: 115
fig: 116
fig: 117
fig: 118
fig: 119
fig: 120
fig: 121
fig: 122


A
N
fig.
121
C
K
M
fig. 120

ac $\frac{NR \pm \infty}{2} = NX$, item est $\frac{NZ \pm Z\infty}{2} = GZ$. eris ergò ut Fig. 124.
$NR.NX :: NZ.GZ$. quapropter erit (juxta præcedentem) $NZ.GZ = NG.NE + CE.CG$.

VIII. Porrò liquet punctum Z esse locum imaginis, quem expetimus, oculo conspicuæ in recta $N\infty$ constituto; utpote circa quod viciniorum ipsi NP radiorum refracti ipsam $N\infty$ intersecant; qua de re multoties egimus, ut pigeat eò plura βαπτολογεῖν.

IX. Facilè verò, Secundum *Theorema præmissum*, designatur punctum Z. Ducatur nempe CG ad refractum NK perpendicularis; & ad connexam CN ducatur perpendicularis GV; & per V ducatur VZ ad CK parallela, secans ipsam NK in Z. factum erit. Nam, connexâ GE, liquet angulos GEC, GNC (circumducti Fig. 125.
nempe per N, E, G, C circuli subtensæ GE insistentes ambos) æquari; hoc est angulos GEC, VGC æquari. quapropter (utrique rectum adjiciendo) toti NEG, ZGV æquantur. item alterni GNE, VZG æquantur. ergò triangula GNE, VZG similia sunt, unde $NG.NE :: ZV.ZG$. itaque $.CE.CG + NG.NE = CE.CG + ZV.ZG$. verùm (ob refractionem) est $NK.KC :: I.R :: CE.CG$; hoc est $NZ.ZV :: CE.CG$. est igitur $CE.CG + NG.NE = NZ.ZV + ZV.ZG$; hoc est $CE.CG + NG.NE = NZ.ZG$. ergò punctum Z conditionem obtinet, imaginis loco congruentem, è mox ostensis. adeò liquet propositum.

X. Quin subnotamus rectam NK ad punctum Z ità dividi, ut sit $NZ.ZK :: NGq.CGq$. Etenim est $NZ.ZK :: NV.VC :: NVq.VGq :: NGq.CGq$.

XI. Subjiciam & hoc è dictis consectarium *Theorema*:

Fiat $\sqrt{3Rq}.\sqrt{Iq - Rq} :: CB.CQ$; ductáque QN ad CB perpendicularis circumferentiæ occurrat ad N; radii verò MN ad CB paralleli refractus sit NK, circuli peripheriæ denuò occur- Fig. 126.
rens in Z; dico punctum Z esse imaginem, qualem mox definivimus, oculo conspicuam in ipsa NK sito.

Nam (ductis CE ad MN, & CG ad NZ perpendicularibus, ac junctâ CN) ob $3Rq.Iq - Rq :: CNq.NEq$. hoc est $3CGq.CEq - CGq :: CNq.NEq$; erit dividendo $4CGq$

—CEq.CEq—CGq::CNq—NEq.NEq::CEq.NEq. quare permutando 4 CGq—CEq.CEq::CEq—CGq. NEq. (hoc est) :: NGq—NEq.NEq. ergò componendo 4 CGq.CEq::NGq.NEq. & ideo 2 CG.CE::NG. NE. quare 2.1 + CG.CE = NG.NE. vel 2.1 = NG. NE + CE.CG. hoc est NZ.GZ = NG.NE + CE.CG. unde liquet, è mox antedictis, propositum.

XII. Ex ista porrò constructione facilè colligitur, si fuerit 2 Rq = Iq — Rq (hoc est si 2 R = I) adeoque CQ = CB, quod hujusmodi punctum Z non aliud erit ab ipso D, seu perpendiculari ipsi AB debitam imaginem ad punctum D consistere, eas verò quæ reliquis refractis conveniunt ejusmodi imagines intra circulum omnes, vel supra peripheriam extare. quinetiam si fuerit 2 R ⊐ I, adeoque CB ⊐ CQ, patet nullius refracti imaginem in peripheria existere, sed omnes supra ipsam. Enim verò in his casibus omnes refracti axem AD supra punctum D intersecant. verùm si fuerit 2 R ⊏ I (utique sicut revera quoad pleraſque cunctas in hac rerum natura pellucidas refringentes materias usu venit) uti reipsâ datur ejusmodi punctum Z, in peripheria TD alicubi situm, ita facilè poterit isto modo determinari.

XIII. Observetur porrò sic definitum punctum Z circuli partem à D versus T per radios quadranti BT incidentes illustratam terminare. Omnes enim ipso MN obliquiùs incidentium refracti ipsam NZ supra Z versus G decussabunt; adeoque ad partes ZD circulo impingent; item omnium ipso MN rectiorum refracti ipsam NZ infra Z versus K intersecabunt; & hinc etiam in arcum ZD cadent.

Fig. 127. XIV. Exhinc apparet (id quod *ab eximio D. Slusio* monitum amicus mihi communicavit) potuisse *Cartesium* sine tabularum confectione suum *Iridis* angulum determinare. nam assumpto arcu DY=DZ; angulum istum arcus ZY metitur; posito circulum propositum per aquei globi centrum transire. quod ità facilè constat. Radii cujusvis diametro BC paralleli MN refractus NZK reflectatur in ZFH; & ZF in FO refringatur; sitque FL ad BD parallela; sumatur etiam DY = DZ; & connectantur CZ, CY; dico angulum LFO æquari angulo ZCY. Nam imprimis ob ZN, ZF æqualiter ad peripheriam inclinatos, patet angulum OFH angulo PNZ vel CKZ æquari. igitur ang. HFL — HFO = ang FIC — CKZ = ang KIZ

XIZ — CEZ = ang NZI — ang CKZ = ang NZC — ang CKZ = ang. ZCD = ZCY. est igitur ang. OFL = ang ZCY. Cùm itaque sit in superiore Hypothesi punctum Z umbræ lucisque confiniùm, manifestè liquet propositum.

XV. Subnotetur autem, si medium inflectens sit aqueum, arcum ZY esse partem circuli totam (posticam scilicet) illuminatam; tangentis enim ST refractus, puta TV, nedum non punctum Y prætergreditur, at citra punctum D cadit. ast in densioribus mediis, velut in vitro, secùs accidere potest; siquidem iis eo tangentis refractus, puta TX, ultra terminum Y (modo prædicto designatum) cadit, ut quidem ex calculo facilè colligatur; unde pars illuminata arcu ZY amplior evadit, tangentium quippe refractis circumscripta. Viderit igitur excellentissimus vir, an universim constet (id quod ipse nisi fallor innuere videbatur) ex observata partis illuminatæ quantitate, *Iridis angulum, etiam juxta Cartesianas Hypotheses, recte determinari*. Nam sumendo arcum DR = DX, ad punctum quidem R pertinget illustratio, neque tamen ulla lux quadranti BT incidens à parte ZR (sed illa tantùm quæ ad partes ZD cadit) ad oculum O inflectetur. unde quoad oculos ad has partes sitos, hoc est quoad rem quæ præ manibus, punctum Z lucem & umbram dirimit atque disterminat. Fig. 128.

XVI. Vobis autem expendendum propono, annon exhinc *apparentiarum in Iride ratio* elici possit, illâ fortè verisimilior, quam ipse *Cartesius* assignavit. quid enim si dixero peripheriæ ZV impingentem lucem, & versus O inflexam magis apparere; primò, quia spissior est, ac à radiorum geminâ diffusione constat, ab utraque puncti N parte in arcum ZV refractorum; tum secundò, quoniam obliquiùs ipsi ZV incidit, adeóque faciliùs & copiosiùs indè quàm aliunde versùs partes O retorquetur? Et cum præsertim circa punctum Z acutiùs radii coëant, neque non incurrant obliquiùs, quidni propterea vividior exindè resultet apparentia? Verùm hæc παραβαπτῶς. Fig. 128.

Quoniam Colorum incidit mentio, quid si de illis (etsi præter morem ac ordinem) paucula divinavero?

XVII. *Album* est quod lucem copiosam, pariter ubique spissam, circumfundit. Talia fermè sunt corpora, rarioribus poris interpuncta; præsertim, quæ multas superficieculas, in omne latus obversas, habent. Suadetur hoc, Quia purè lucida semper alba videntur;

Quia

Quia corpus bene tersum luci Splendidæ expositum albescit, Quoniam alba difficiliùs ignem concipiunt; Quòd humore tenuiore vacuata corpora (*Capilli, Folia, Cineres*) *canitiem* acquirunt; Quibus & frigore constricta accensori possent.

Nigrum est, quod lucem minimè, vel parcissimè refundit. talia plerunque sunt corpora valdè pellucida; nec non quæ crebros meatus, & cavernulas lucem absorbentes habent. Hoc indicat, Quod omnes *Umbræ nigræ apparent*; Quod *Aqua, Vitrum, Nubes* ad hunc colorem vergunt; Quod *nigra* faciliùs ignem imbibunt, calefiunt, comburuntur; Quòd longiùs dissita (quorum sensim intercipitur, & amittitur lux) obscuriora videntur.

a Lat. Fig. 128. *Rubrum est*, quod lucem effundit hinc indè confertam, ac solito magis constipatam, ast interstitiis umbrosis diremptam, & interruptam. talia concipi possunt corpora, multas intra se quasi *fornaculas* & *focos* habentia (qualia X, è *Speculis cavis* contextum; & Y è *Sphærulis*, transmissam lucem ad totidem *focos* cogentibus, constans). Argumento sit, Quòd à *Speculis*, & *vitris ustoriis* collecta lux rubescit; Quòd corpora densa ignita (quippe quorum cellæ luce spissâ referciuntur) rubra videntur; Quòd roscida nubes Soli (matutino, vel vespertino) exposita rubet; Quòd erosio rubiginem parit. || Ad rubri naturam fortasse pertinet, quòd compressa lux languidiùs emicat.

Cæruleum est quod lucem raram, aut impetu segniore concitatam emittit. talia Videntur esse corpora, quæ particulis constant albis ac atris alternatim dispositis; sed & hunc subinde colorem ostentant candida maligniùs illustrata. Exemplo sint, *Æther Sudus* (in quo nempe pauciora natant corpuscula lucem ad oculos reverberantia, cæterâ luce dilabente) *Mare*, sale candido nimirum & humore pellucido constans; Umbra corporis cujusvis opaci, de die, ad lucernam ardentem facta, & ad chartam albam excepta seu terminata; (nempe corporis AB ad chartam XY violacea depingitur umbra, à lucerna C).

è Lat. Fig. 128. *Viride* cæruleo perquàm agnatum est. *Discrimen* explorent sagaciores; ego non ausim ariolari.

Cæterùm reliqua colorata ex istis variè commixtis, atque contemperatis emergunt; ut *flavum* ex albo copioso, rubrique nonnihillo intersperso; *purpureum* ex multo cæruleo, rubrique tantillo, &c. Verùm sufficiat hâctenus, ista supra captum nostrum posita Scrutantes, nos illis, qui *αἰτιολογίας Physicas* morosiùs excipiunt, deridendos propinasse.

Sufficient hæc pro radiis parallelis; ad divergentes ordine procedendum est; ast interpositâ morâ, nè vix exorsi cogamur abrumpere. ||

Lect.

Lect. XIII.

I. *Transactis iis quæ refractioni conveniunt isti, quam ad circuli peripheriam subeunt radii sibimet paralleli; quid iis obvenit proximè dispiciendum venit, qui a puncto quopiam sensibiliter divergentes itidem circulo se objiciunt refringendos.* cum autem in hac Hypothesi multa reperiatur casuum varietas è pluribus causis oriunda (nedum enim à mediorum specie differentium ordine, vel situ versus se diverso; quinetiam circuli refringentis alia ac alia, convexa nempe vel concava, facie radiationi obversa; sed ab ipsius quoque radiantis magis aut minus à refringente semoti positione conclusionum emergit nonnulla discrepantia) nobis incumbet ità rem, quâ possumus, moderari, simul ut cùm ex abstractione nimia proveniens confusio, tum è repetitione fastidium aliquousque devitentur. id autem non aliàs, opinor, commodiùs assequemur quàm imprimis generalia quædam attingendo, cuidam uni casui (illi nempe, ubi I ⊏ R, & radii convexis circuli partibus incidunt). Sic applicata, ut satis facilè possint ad alios quoque transferri; tum peculiaria nonnulla singulis congruentia subnotando, ad rem.

II. In circulum refringentem BN (cujus centrum C) radiet punctum A, & connexa AC protendatur ad utrasque partes indefinitè; tum cujusvis incidentis AN sit refractus NK, cum axe nimirum in K conveniens; dico compositas rationes AC ad CK, & NK ad NA æquari rationi I ad R. Conjungatur enim CN, & ducatur KH ad CN parallela; erit igitur (ut generatim antehac habetur ostensum) I.R::NK.NH=NK.NA+NA.NH=NK.NA+AC.CK: Q.E.D. Fig. 129. 3 Lect. num. 9.

III. Hinc si fuerit CA.CR :: I.R. erit CK.CR::NK.NA.

Nam

Nam erit tum CA.CR = CA.CK + NK.NA. inde, communem utrinque adjiciendo rationem CK ad CA, erit CK.CA + CA.CR = CA.CK + CK.CA + NK.NA. hoc est CK.CR :: NK.NA.

Fig. 130, 131. Notetur in figuris sequentibus esse perpetuo CA.CR :: I.R. quod semel, brevitatis causâ, monitum esto.

IV. Hinc consectatur, primò; Si fuerit AN ⊏ CR, quòd refractus N« cum axe AC prorsùm excurrens conveniet. Nam erit CK.AN ⊐ CK.CR :: NK.AN. adeóque CK ⊐ NK.

Fig. 129.

Fig. 130. V. Secundò; si fuerit AN = CR, refractus N« ad AC parallelus erit.

Nam sit NH ad AC parallela. quum itaque sit CA.AN :: (CA.CR ::) I.R; erit AN ipsius HN refractus. ergò vicissim NH ipsius AN.

Fig. 131. VI. Tertiò, Si fuerit AN ⊐ CR, refractus N« cum AC retrò conveniet extractus.

Erit enim tunc CK : AN ⊏ CK.CR :: NK.AN. ac indè CK ⊏ NK.

VII. Hinc clarum est; Si fuerit AB non minor quàm CR, omnes refractos versus AC procurrentes convergere. erit enim tunc semper AN ⊏ CR.

VIII. Subnotetur autem si fuerit saltem AB = CR; axi propiores radios in sensibilem parallelismum refringi.

IX. Item, Si AT circulum tangat, & fuerit AT ⊐ CR; manifestum est omnes refractos retrò protractos cum AC concurrere. nunc enim semper est AN ⊐ CR.

X. Clarum est quoque, si AN = CR, omnes arcui BN incidentium refractos retro productos, omnes autem arcui NT incidentium refractos antrorsum procurrentes axi occurrere.

XI. Quum autem in casu, propositi maximè contrario (quum nempe I ⊐ R; & radii concavis incidunt partibus) adsimilis contingat diversitas, hanc quoque breviter attingemus.

1. Si

1. Si fuerit AN ⊏ CR, refractus Nα cum AC retrò tractus conveniet. Fig. 132.

Nam CK ⊐ NK. (ut in priore casu).

2. Etiam hîc si AN = CR, refractus Nα fit ipsi AC parallelus.

Nam erit CK = NK. quod in hoc casu nisi K infinitè distet contingere nequit.

3. Si AN ⊐ CR; refractus Nα prorsùm excurrens axi occurrit.

Nam hîc CK ⊏ NK.

4. Si AB ⊐ CR; omnes refracti directè progredientes ad AC convergunt. Erit enim quivis incidens AN ⊐ CR. Fig. 133.

5. Quum AN = CR, evidens est omnes arcui BN incidentes retrorsum versus CA refractos convergere; omnes autem ad partes NT cadentes antrorsum versus CB refringi.

XII. Hinc apparet sub istis duobus generalibus casibus tres à diverso puncti radiantis intervallo subnascentes speciales casus comprehendi, nempe vel omnes ab axe post refractionem progredientes divergunt, vel omnes ad ipsum convergunt, vel aliqui divergunt, alii convergunt, his intercedente medio quodam ad illum parallelo. quæ subnotâsse discrimina videbatur operæ pretium ac determinâsse. Subdimus etiam quoad reliquos generales casus simpliciùs sese rem habere; scilicet eodem semper modo: Omnes enim ad cavum densius incidentium refracti directè procedentes ab axe divergunt; Ut & omnes eorum, qui convexo ratiori impungunt; id quod è generalissimis refractionum legibus immediatè sequitur, & è simplice secundum illas linearum ductu dilucescit. His admonitis in orbitam regressi pergimus. Fig. 134, 135, 136.

XIII. E præmisso Theoremate non dificilè conficitur hoc *Problema*: Dato in axe puncto K, refractum designare, qui per hoc ipsum transeat. ||

Hoc nempe pacto. Reperiatur punctum G, ut sit KG.AG :: CK.CR. item fiat GF.FA :: CK.CR (:: KG.AG). tum centro F, intervallo FG describatur circulus refringentem intersecans ad N; erit connexa NK incidentis AN refractus. *Lect.* 10. *Num.* 25. Fig. 137.

Nam ducatur FN; & ob KG.AG :: GF.FA. erit permutatim KG.GF :: AG.FA. dividendóque KF.GF :: GF.FA. hoc est KF.FN :: FN.FA. quare triangula KFN, NFA

assimilantur. unde NK.KF:: AN.NF. seu permutando NK. AN::KF.NF. erat autem priùs KF.NF::GF.FA::CK. CR. est igitur NK.AN::CK.CR. unde (juxta dictum Theorema) constat factum.

Fig. 137.

XIV. Ad constructionem istam advertentes animum, hujusmodi facilè *Corollaria* deducetis:

1. Si circulus GNH *refringentem* contingat ad H; ipsius AH (perpendicularis utique) refractus in K terminabitur; & aliorum incidentium refracti ad unas ipsius K partes (ultra nempe vel citra K respectu centri, pro diversitate casuum ab ipsius A positione resultantium) cadent.

2. Si dictus ille circulus *refringenti* non occurrat omninò, *Problema* constructionem respuet; nec ullus refractus punctum K permeabit.

3. Si circulus GNH *refringenti* coincidat (id quod facilè concipi potest, & in aliquo reverà casu contingit) omnes refracti in punctum K confluent. || Hæc & alia constructionem istam consectantur solerter expansem; quorum saltem nonnulla haud abs re fuerit exertiùs ostendi; velut hoc imprimis palmarium.

XV. Si fuerit AB.CR::BZ.CZ; dico punctum Z esse limitem, ultra vel citra quem nullus refractus axim intersecat; seu perpendicularis ipsius AB refractum in Z terminari.

Nam cujusvis incidentis AN refractus axi occurrat in K, erit ideò CK.CR::NK.NA. ergò quum sit CR.CZ::AB.BZ; erit CK.CR + CR.CZ = NK.NA + AB.BZ.

Fig. 138.

1. Est autem (in prima figura, ubi puncta Z, & K sunt ad partes centri, vel ubi refracti ad axem directè procurrentes convergunt) BK ⊏ NK, & AB ⊐ AN; adeóque BK.AB ⊏ NK.NA. ergò CK.CR + CR.CZ ⊐ BK.AB + AB.BZ. hoc est CK.CZ ⊐ BK.BZ. vel inversè permutando BK.CK ⊏ BZ.CZ. dividendóque BC.CK ⊏ BC.CZ. ergò CK ⊐ CZ; adeóque punctum K supra Z existit, versùs centrum; quod erat propositum ostendere.

Fig. 139.

2. In secundâ verò figura (ubi puncta Z, K ad alteras supra punctum A partes à centro aversas cadunt) connectatur subtensa BN, & ducatur AS ad KN parallela; hæc secabit angulum BAN, majorem ipso BKN, vel BAS; & cùm angulus ABN sit obtusus, erit AN ⊏ AS. adeóque KN.AN ⊐ KN.AS::KB.AB. erit etiam hìc igitur (ut supra) CK.CZ ⊐ BK.BZ. vel permutatim CK.BK

$\sqsupset$CZ.BZ. dividendóque CB.BK$\sqsupset$CB.BZ. adeóque BK $\sqsubset$BZ; hoc est punctum K magis quàm Z à centro elongatur.

3. Haud dissimilis in aliis casibus erit *Demonstratio*; ut in hoc, ubi Fig. 140. I$\sqsupset$R, ad convexas; est enim hic (ut in præcedente) KB.AB$\sqsupset$KN.AN. adeóque (supra monstratis insistendo) CK.CZ$\sqsubset$KB.BZ. vel permutando CK.KB$\sqsubset$CZ.BZ. dividendóque CB.KB$\sqsubset$CB.BZ. unde KB$\sqsupset$BZ. adeóque punctum K centro semper vicinius est quàm Z.

XVI. Hæc autem cùm, modo suo mutatis mutandis, ad omnes casus transferri possint, habentur indè determinati refractorum limites, hoc est apparentia radiantium punctorum A loca, respectu oculi centrum habentis in axe AC situm; juxta doctrinam à nobis toties inculcatam.

XVII. Id autem hìc in duobus casibus (utroque nimirum ad circuli cavas) peculiare venit observandum cùm sit CB = CR, omnes refractos in ipso puncto Z (ut suprà definito) retrò protractos congregari. Nam ob AB.BC::AB.CR::BZ.CZ. erit dividendo AC.BC::BC.CZ. quapropter ad punctum quodvis N adsumptum connexis AN, ZN, erit ZN.AN:: (CZ.CN::) CZ.CR. unde ZN refractus erit incidentis AN.

XVIII. Hinc etiam si fuerit AB = CR, consequetur punctum Z Fig. 141. à centro infinitè distare; quia nempe tum ob AB.CR::BZ.CZ, erit BZ = CZ; id quod fieri nequit, nisi punctum Z ità elongetur infinitè.

XIX. *Consectantur* & hæc: Si punctorum radiantium A, α limites Fig. 142, sint puncta Z, ζ, erit AC.AB + BZ.CZ = αC.αB + Bζ. Cζ. 143.

Nam è præmissis facilè constat esse

$$\text{tam } \left.\begin{matrix} AC.AB + BZ.CZ \\ \alpha C.\alpha B + B\zeta.C\zeta \end{matrix}\right\} \text{quam } I.R.$$

XX. Unde C$\zeta\sqsubset$CZ: Nam ob BC.AB$\sqsupset$BC.αB. componendóque AC.AB$\sqsupset\alpha$C.αB. erit BZ.CZ$\sqsubset$Bζ. Cζ. dividendóque BC.CZ$\sqsubset$BC.Cζ. adeóque C$\zeta\sqsubset$CZ.

Fig. 144. XXI. Imò universim si radii quivis AF, $\alpha\varphi$ ad circulum refringentem æqualiter inclinentur, hisque conveniant refracti FL, $\varphi\lambda$, erit $C\lambda \sqsubset CL$. id quod hoc modo non inelegantèr ostenditur. Ducatur recta BX cum BC angulum efficiens parem angulo refracto ad positam inclinationem pertinenti; perque puncta F, φ; & centrum C transeuntes rectæ ipsi BX occurant punctis P, ϖ. tum quoniam triangula FCL, BCP æquiangula sunt (angulus enim CBP angulo CFL ex constructione par est, & ang. BCP verticali suo FCL æquatur) nec non latus CB lateri CF æquatur, erit CP = CL. Simili planè discursu est $C\varpi = C\lambda$. Porrò, quia $C\varphi$ ad $C\alpha$ (hoc est Sinus anguli $C\alpha\varphi$ ad Sinum anguli $C\varphi\alpha$) majorem rationem habet, quàm CF ad CA (hoc est quàm Sinus anguli CAF ad Sinum anguli AFC, vel æqualis anguli $C\varphi\alpha$) liquet angulum $C\alpha\varphi$ majorem esse angulo CAF, adeóque reliquum $\alpha C\varphi$ minorem esse reliquo ACF; vel angulum PCB angulo ϖCB. unde liquet esse $C\varpi$ majorem quàm CP; hoc est $C\lambda$ majorem esse quàm CL: Quod E.D.

Coroll. Vides arcum BF majorem esse arcu Bφ.

Notes etiam omnes ejusdem inclinationis refractos ope ductæ rectæ BX promptissimè designari. sed hæc an πρῦργυ fuerint nescio.

Fig. 145. XXII. *Subjiciam & hoc Theorema:* Convexo densiori incidentiùm radiorum AM, AN (quorum AN sit obliquior) refracti MK, NL axem ad easdem partes, directè pergentes, secent, iste ad K, hic ad L; dico fore CK majorem quàm CL.

Nam connexis CN, KN; & ductâ LH ad KN parallelâ; quoniam, è præmissis, est CK . CR :: MK . MA. & CR . CL :: NA . NL. erit CK . CK + CR . CL = MK . MA + NA . NL. est autem NK . NA $\sqsupset$ MK . MA (quia NK $\sqsupset$ MK, & NA $\sqsubset$ MA) ergo CK . CR + CR . CL $\sqsubset$ NK . NA + NA . NL. hoc est CK . CL $\sqsubset$ NK . NL. hoc est NK . HL. $\sqsubset$ NK . NL. quapropter est LH $\sqsupset$ NL. est autem angulus LCN obtusus; ergò recta LH angulum CLN secat; ac angulus LHC interno LNC major est; hoc est angulus KNC angulo LNC major est. unde liquidò patet fore CK $\sqsubset$ CL.

Coroll. CK . CL = MK . MA + NA . NL.

XXIII. Hinc, ejusmodi omnes refracti seipsos priùs quàm axem intersecant, velut ad X. || Hoc speciminis loco pro casu, qui præ manibus.

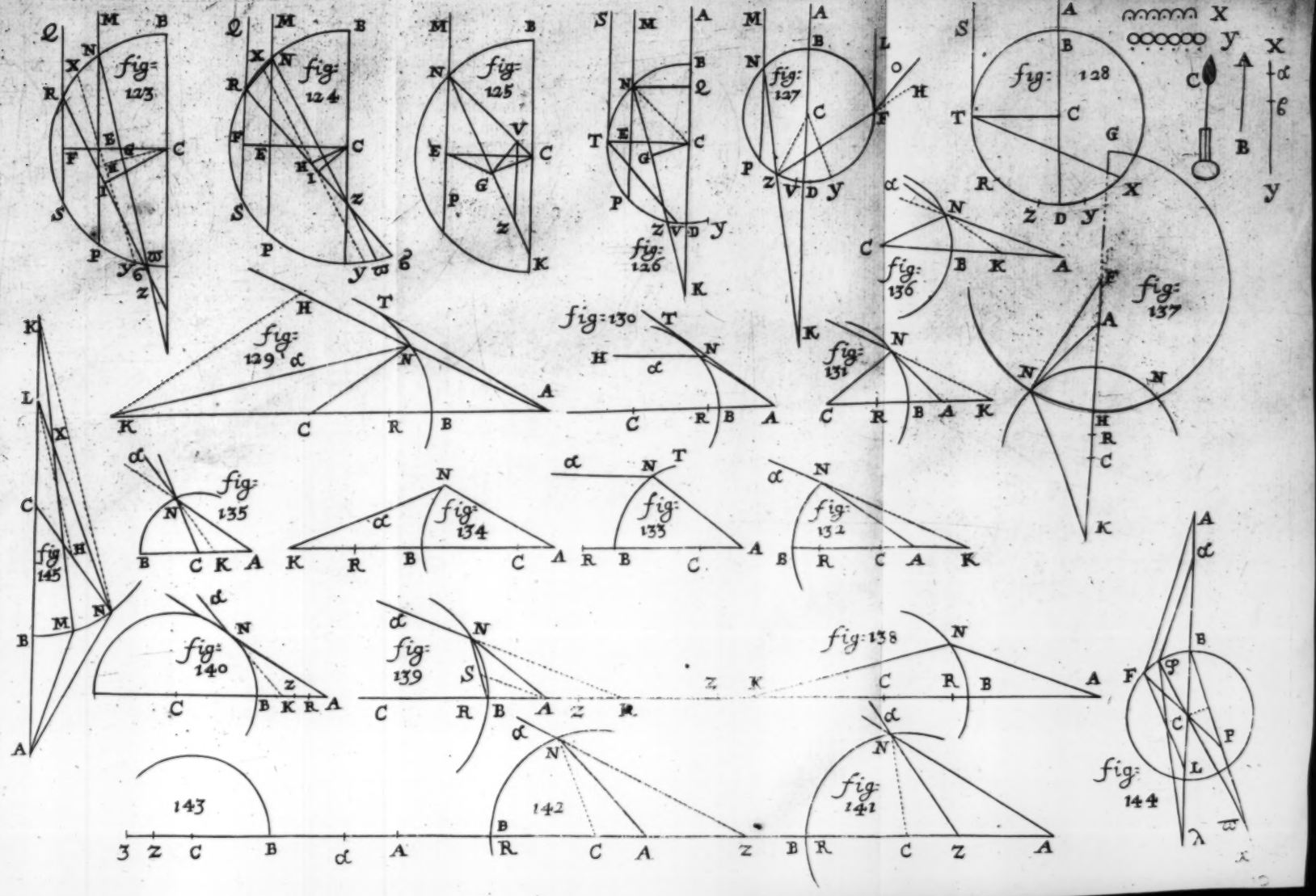
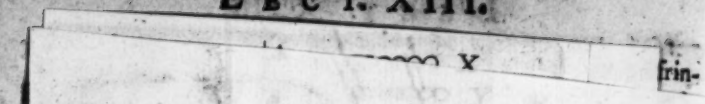


fig: 123
fig: 124
fig: 125
fig: 126
fig: 127
fig: 128
fig: 129
fig: 130
fig: 131
fig: 132
fig: 133
fig: 134
fig: 135
fig: 136
fig: 137
fig: 138
fig: 139
fig: 140
fig: 141
fig: 142
fig: 143
fig: 144
fig: 145

Fig. 144.



frin-

Fig. 145.

manibus. propter alios qui similia volet, ipse viderit, & sibi paraverit. ego jam aliò progredior; eò scilicet, ut locum definiam imaginis in dato quovis refracto apparentis; prætervehemur enim illud in his certè casibus *intricatissimum Problema* (cujúsque Solutio nullatenus aut laborem quem exigit, aut temporis jacturam compensabit) quo jubetur per datum punctum transeuntem refractum designare. positione datum igitur refractum accipimus; & in hoc imaginis locum ex hoc uno Theoremate determinamus.

XXIV. Duorum incidentium ANP, ARS sibi quàm proximorum concipiantur refracti Nσ, Rσ sese puncto Z decussantes; bisecentúrque subtensæ NP, Nσ punctis E, G; (à rectis nempe CE, CG ad illas perpendicularibus) dico rationem NZ ad GZ è rationibus CE ad CG (hoc est I.R), NG ad NE, ac AN ad AE componi. Fig. 146.

Ducantur enim CK ad RS, & CI ad Rσ perpendiculares; in que productis CE, CG capiantur CF = CK; & CH = CI; & per F ducatur TV ad NP parallela; & per H etiam XY ad Nσ parallela. Jam est AP. AN :: arc PS. arc NR (ob sumptam arcuum indefinitam parvitatem). ergò $\frac{AP \pm : AN}{2}$. AN :: $\frac{\text{arc } PS \pm : \text{arc. } NR}{2}$. arc NR. hoc est AE. AN :: arc NT. arc NR. item est NZ. Zσ :: arc NR. arc $\sigma\sigma$. ac indè NZ. $\frac{NZ \pm : Z\sigma}{2}$ :: arc NR. $\frac{\text{arc } NR \mp : \sigma\sigma}{2}$. *hoc est NZ. ZG :: arc NR. arc NX. ergò, rationes æquales adjungendo, est AE. AN + NZ : ZG = arc NT. arc NR + arc NR. arc NX = arc NT. arc NX. quoniam autem est CE. CG :: (I.R :: CK. CI ::) CF. CH. vel permutando CE. CF :: CG. CH; erit, *juxta præmonstrata, arc NT. arc NX = NG. NE + CE. CG. quapropter erit AE. AN + NZ. ZG = NG. NE + CE. CG. unde (rationes hinc indè pares subducendo) erit NZ. ZG :: + CE. CG + NG. NE + AN. AE. Quod propositum fuit ostendere.

* *Lect.* 9. *Num.* 11.

* 12 *Lect. Num.* 6.

XXV. Hinc, si fiat CE. CG :: NE. L; & AN. AE :: L. M; erit NZ. ZG :: NG. M. Nam NG. NE + CE. CG + AN. AE = NG. NE + NE. L. + L. M = NG. M.

unde

unde Problematis conſtructio, ſeu puncti Z determinatio habetur.

Fig. 147. XXVI. Subnectam & ab amico communicatam (aliâ methodo repertam ab ipſo, concinnéque demonſtratam) conſtructionem: Duc NR incidenti AN perpendicularem, & ſecantem axin in R. Fac NP. N∞ :: NR. T. duc NQ refracto NK perpendicularem, & æqualem ipſi T; denique jungatur QC; hæc producta ſecabit NK in foco quæſito Z.

XXVII. Hujuſmodi verò punctum Z eſſe locum ipſiſſimum imaginis puncti A, oculo apparentis in ipſa N∞ conſtituto, ſæpiùs expoſitæ rationes manifeſtant.

*In Num. 25. XXVIII. Attendenti porrò conſtabit, ſiquidem fuerit *NG ad M ratio æqualitatis, quòd punctum Z infinito à puncto G, vel N intervallo diſtabit; ſeu proximi radio N∞ refracti ipſi N∞ paralleli erunt; ſin ratio NG ad M ſit majoris inæqualitatis, quòd punctum Z exiſtet infra G, vel in NG antrorſum protracta; verùm denuò ſi NG ⊐ M, quod punctum Z ſupra N, vel in NG retrò tractâ verſatur. Hæc ſufficerit innuiſſe. Hinc etiam poſticæ circuli partis illuminatæ quantitas utcunque poſſit determinari: ſed ad locum Solidum res ſpectat, ipsámque proinde miſſam facio.

Fig. 148. XXIX. Inferemus autem hîc *Phænomeni* cujuſdam ſatis obvii, quódque nonnullis forſan (*utpote communibus Opticæ decretis apparenter adverſum*) mirabile videatur, explicationem. Sit lucidi puncti A (modicè diſtantis, & vividè radios ejaculantis) ad arcum circularem MBN (ab axe AB biſectum) imago, ſeu focus Z; & per Z, ad ipſam AZ perpendicularis traducta concipiatur linea XY. porrò, deſumatur aliud punctum remotius E; liquet ejus imaginem citra punctum Z (centrum verſus) jacere; ductis itaque rectis EM, EN, harum refracti adhuc altiùs ſe interſecant, puta ad K; productæque MK, NK lineam XY ſecent punctis O, P. quinetiam ulterius accipiatur punctum F; ductarúmque rectarum FM, FN refracti ſint ML, NL; lineæ XY occurrentes ad puncta R, S; quibus peractis manifeſtum eſt intervallum RS ipſo OP majus eſſe. Hinc facilis habetur ratio, cur punctum lucidum (velut *ardens lucerna*, vel *Imago Solis* ad *Speculum* aut *lentem diaphanam* effecta, (quin & ſtellæ fixæ) quæ propter exiguitatem ſuam apparentem punctorum ad inſtar haberi poſſunt) quò à diſtinctæ viſionis loco longiùs amovetur, eò (contra quàm in aliis viſibi-

viſibilibus obvenit) majus apparet. Nam ſi arcus MNB oculi ſuperficiem repræſentet, *(pupilli amplitudini reſpondentem)* linea XY fundum oculi, A locum diſtinctæ viſionis; ejuſmodi lucens ad A poſitum ſatis anguſtum circa Z ſpatium illuſtrabit; ad E verò conſtitutum, validè radios vibrans, totum coruſcatione ſuâ ſpatium OP afficiet; ad F denique collocatum adhuc majus intervallum RS percellet, indéque grandiorem ſui ſpeciem exhibebit. In placidè verò lucem remittentibus aliter ſe habet, quoniam pauciores, & languidiùs agentes qui extremis O, P vel R, S allabuntur radii nullam ſui perceptionem excitant. Fig. 148.

Eò lubentius hanc, adeò perſpicuam, hujuſmodi *Phænomenon* aſſignamus rationem, quoniam in eorum reddendis cauſis ità titubat magnus ille *Galilæus*, neſcio quos, ex refractionibus, relectionibúsve quibuſdam commentitiis oriundos, aſcititios ſuggerens cincinnos. ||

XXX. Quin hic tandem *Dioptricam ſimplicem circularem claudemus*, quam utcunque quàm pauciſſimis ità complexi ſumus, ut præcipua ſaltem (quæ videbantur) & notatu digniora perſtrinxerimus. prius autem *Catoptricam circularem*; nec non utramque, tam *Dioptricam* quàm *Catoptricam*, planam, quantum inſtituto noſtro viſum eſt congruere, pertractavimus. quibus perfuncto mihi propoſitum aliquando fuit ad curvas alias, conicas præſertim ſectiones, haud diſſimili methodo pertentandas cogitationem extendere. Sed enim, cùm in his tricis *Geometricis* etiamnum ſatis ſupérque commoratus ſim; & præter ea quæ circa conicas ſectiones à nobis pridem inſinuata ſunt (quæ & ab aliis luculentè tractata proſtant) reliqua non ità magnum uſum ſpondeant; contentus haſce primarias, in uſu maximè poſitas, & uſui præſertim accommodatas ſuperficies, ultra paullò quàm hactenùs attentatum aut peractum ſcirem, excuſſiſſe; cæteras omninò miſſas faciam.

XXXI. Porrò, quoad inflectiones iſtas, quos pluribus ſucceſſivè planis, aut Sphæricis Superficiebus, utcunque conſtitutis aut compoſitis, incidentes ſubeunt radii; quæ conveniunt illis Symptomata, poſſunt ea de præmiſſis elici; quorum certè præcipuum eſt, quod apparentis puncti locum reſpicit ab inflectionibus ad iſtas ſuperficies factis reſultantem; in hoc enim indagando, determinandóque potiſſimùm hæ diſquiſitiones verſantur; Hunc igitur ſaltem definitum exhibebimus, idque ſatis commodè, ex uno quodam Theoremate, ſeu regula generali; cui exempla quædam, communis uſûs in gratiam ſelecta, eorúmque qui in hæc inciderit minuendo labori præſertim comparata, ſubjungemus. Iſta verò, nè jam tædio Sinus, ſequenti reſervamus. Lect.

Lect. XIV.

I. *Sub præcedentis calcem, Regulam pollicebamur, exemplis ſtipatam, ex qua punctorum è variis inflectionibus reſultantes, imagines dignoſcantur. illam nunc exhibemus quàm ſimplicimè conceptam.*

Fig. 149, 150. Sit A B E F O radius principalis, puncti radiantis A ſpeciem per oculi centrum O deferens, ex incidente primo A B, & inflexis B E, E F, F O (in directum aut ſecùs diſpoſitis) conſtans; tum puncti A reſpectu oculi in recta B E poſiti, & ex inflectione ad ſuperficiem B reſultans (è præmiſſis utique deſignabilis) imago ſit Z. item hujus Z (quod jam veluti radians concipiatur) reſpectu oculi in recta E F conſtituti, & ab inflectione ad ſuperficiem E emergens imago ſit Y; demùm puncti Y (tanquam in ſuperficiem F radiantis) reſpectu oculi in F O collocati ſit imago X. erit hoc punctum X imago cunctis ab his inflectionibus proveniens. neque ſecùs quotcunque fuerint inflectiones ſeſe res habebit; enimverò ſemper ex illa tali poſtrema inflectione reſultans imago, eadem erit cum illa, quam omnes exhibent.

Hujus effati veritas è conſtructione ſatìs apparet; è qua facilè colligitur proximorum ipſi A B incidentium hinc indè radiorum inflexos tandem circa punctum X ipſum F X interſecare. vel ità rem collegeris: punctum Z eſt puncti A imago; & punctum Y ipſius Z; denuóque punctum X ipſius Y; itaque punctum X ipſius A imago erit, qualem nempe res hic fert, remota. Strictiore longiuſculo diſcurſu poſſet hoc comprobari, ſed quorſum rem ſatìs claram intricare?

II. Exempla jam, quæ dixi, ſeu è præmiſſis deducta conſectaria ſubnectam. Notetur autem imagines, quæ in iis pròponuntur deſignandæ, oculum reſpicere Centrum habentem in ipſo radiationis axe (qualis eſt recta B D) conſtitutum. item diverſarum ſuperficierum ac radiationum axes ſibimet in directum poni. præſumatur etiam in refractionibus ex ære factis ad vitrum fore I. R:: 5. 3; ad aquam verò fore I. R:: 4. 3. (hæ nempe rationes veris probè congruæ depre-

deprehenduntur) : addo, confusionis evitandæ causâ symbolum I dehinc in his exemplis perpetuò majorem proportionis refractiones dimetientis terminum denotare, quocunque de medio in quodcunque peragatur refractio. porrò, medium primum infringens perpetuò densius intelligatur rariori circundatum. item, in figuris appositis litera C denotat centrum anterioris circuli, K centrum posterioris; & B verticem anterioris, D verticem posterioris, denuò designat Y locum imaginis quæsitam.

Hisce præmonitis, primum de longinquo radiantium, seu parallelos ejicientium radios punctorum imagines, pro lentium varietate, sic determinantur.

I. *Ad lentem plano-convexam.* Fig. 151.

II. *Ad lentem plano-concavam.*

Fiat $I - R.R :: DK.DY.$
In Vitro est $DY = \frac{1}{2}KD.$
In Aqua est $DY = 3KD.$

III. *Ad lentem convexo-planam.* Fig. 151, 152.

IV. *Ad lentem concavo-planam.*

Fiat $\begin{cases} I - R.I :: BC.BZ; \& \\ I.R :: DZ.DY. \end{cases}$
In Vitro $DY = \frac{1}{2}BC - \frac{1}{3}BD.$
In Aqua $DY = 3BC - \frac{1}{4}BD.$

V. *Ad lentem convexo convexam.* Fig. 152.

VI. *Ad lentem concavo-concavam.*

Fiat $\begin{cases} I - R.I :: BC.BZ; \& \\ \frac{I}{R}KZ - DZ.DZ :: DK.DY. \end{cases}$

Coroll. *Ad integram Sphæram.*
Fiat $2I - 2R.I :: CD.CY.$

VII. *Ad lentem convexo-concavam.* Fig. 152, 153.

VIII. *Ad lentem concavo-convexam.*

Fiat $I - R.I :: BC.BZ.$ &

Fig. 152, 153.

1. Si punctum Z cadat inter C, & K, fac $DZ + \frac{I}{R}KZ . DZ :: DK . DY$; & cape DY ad partes lentis versus K.

2. Si punctum Z cadat extra CK, & sit insuper $DZ \sqsubset \frac{I}{R}KZ$, fac $DZ - \frac{I}{R}KZ . DZ :: DK . DY$; & cape DY ad partes lentis versus K.

3. Si $DZ = \frac{I}{R}KZ$, imago Y infinitè distabit.

4. Si $DZ \sqsupset \frac{I}{R}KZ$; fiat $\frac{I}{R}KZ - DZ . DZ :: DK . DY$, & cape DY ad partes lentis adversas ipsi K.

De sensibiliter autem propinqua distantia radiantium seu divergentes radios emittentium punctorum (qualia semper designat punctum A) imagines (ut & illæ quas ad ejusmodi puncta convergentes efficiunt radii) hoc pacto determinantur.

Fig. 154, 155.

I. *Ad lentem plano-planam diverg.*

II. *Ad lentem plano-planam converg.*

Fiat $\begin{cases} R . I :: AB . BZ, \text{ \& } \\ I . R :: DZ . DY. \end{cases}$

Brevius. Fiat $I . I - R :: BD . AY$.

Fig. 156.

III. *Ad lentem plano-convexam diverg.*

IV. *Ad lentem plano concavam converg.*

Fiat $R . I :: AB . BZ$. & cum Z cadit

1. Extra DK, si $\frac{I}{R}KZ \sqsubset DZ$; fac $\frac{I}{R}KZ - DZ . DZ :: DK . DY$; & cape DY ad partes lentis adversus A.

2. Si $\frac{I}{R}KZ = DZ$; imago distabit infinitè.

3. Si $\frac{I}{R}KZ \sqsupset DZ$; fac $DZ - \frac{I}{R}KZ . DZ :: DK . DY$; & cape DY versus A.

4. Cùm

4. Cùm Z cadit inter puncta D, K; fac $DZ + \frac{I}{R} KZ . DZ :: DK . DY$; & cape DY versus A.

V. *Ad lentem plano-concavam diverg.* Fig. 156, 157.

VI. *Ad lentem plano convexam converg.*

Fiat $\begin{cases} R . I :: AB . BZ ; \& \\ \frac{I}{R} KZ - DZ . DZ :: DK . DY. \end{cases}$

VII. *Ad lentem convexo-planam diverg.* Fig. 157.

VIII. *Ad lentem concavo-planam converg.*

1. Si $AB \sqsubset \frac{R}{I} AC$, puncta Z, & Y ad lentis partes puncto A adversas reperientur, facto $AB - \frac{R}{I} AC . AB :: BC . BZ$. & $I . R :: DZ . DY$.

2. Si $AB = \frac{R}{I} AC$, imago infinitè distabit.

3. Si $AB \supset \frac{R}{I} AC$; deprehendentur Z, & Y versus A, facto $\frac{R}{I} AC - AB . AB :: BC . BZ$; & $I . R :: DZ . DY$.

IX. *Ad lentem concavo-planam diverg.* Fig. 158.

X. *Ad lentem convexo-planam converg.*

Si A cadat extra BC, fac $AB - \frac{R}{I} AC . AB :: BC . BZ$; sin A cadat inter B, & C, fac $AB + \frac{R}{I} AC . AB :: BC . BZ$; tum fiat $I . R :: DZ . DY$.

Fig. 158, 159. XI. *Ad lentem convexo-convexam diverg.*

XII. *Ad lentem concavo-concavam converg.*

1. Si $AB \sqsubset \frac{R}{I} AC$, facto $AB - \frac{R}{I} AC . AB :: BC . BZ$; & $\frac{I}{R} KZ - DZ :: DK . DY$; puncta Z, Y adversus A cadunt.

2. Si $AB = \frac{R}{I} AC$, fac $I - R . R :: DK . DY$; & cape DY adversus A.

3. Si $AB \sqsupset \frac{R}{I} AC$; fac $\frac{R}{I} AC - AB . AB :: BC . BZ$; & sume BZ versus A. Jam cùm Z cadit extra DK, si primò sit $\frac{I}{R} KZ \sqsubset DZ$, fac $\frac{I}{R} KZ - DZ . DZ :: DK . DY$; & sume DY adversus A.

4. Secundò, si $\frac{I}{R} KZ = DZ$, imago distabit infini è.

5. Tertiò, si $\frac{I}{R} KZ \sqsupset DZ$, fac $DZ - \frac{I}{R} KZ . DZ :: DK . DY$; & sume DY versus A.

6. Quum denuò cadit Z inter D, & K, fiat $DZ + \frac{I}{R} KZ . DZ :: DK . DY$; sumatúrque DY versus A.

Corol. Ad integram Sphæram diverg.

1. Si $AB + AC \sqsubset \frac{2R}{I} AC$; fiat $AB + AC - \frac{2R}{I} AC . AC :: BC . CY$; & cape CY adversus A.

2. Si $AB + AC = \frac{2R}{I} AC$; imago in infinitum abit,

3. Si $AB + AC \sqsupset \frac{2R}{I} AC$; fiat $\frac{2R}{I} AC - AC - AB . AC :: BC . CY$; capiatúrque CY versus A.

Fig. 159. XIII. *Ad lentem concavo-concavam diverg.*

XIV. *Ad lentem convexo-convexam converg.*

Si

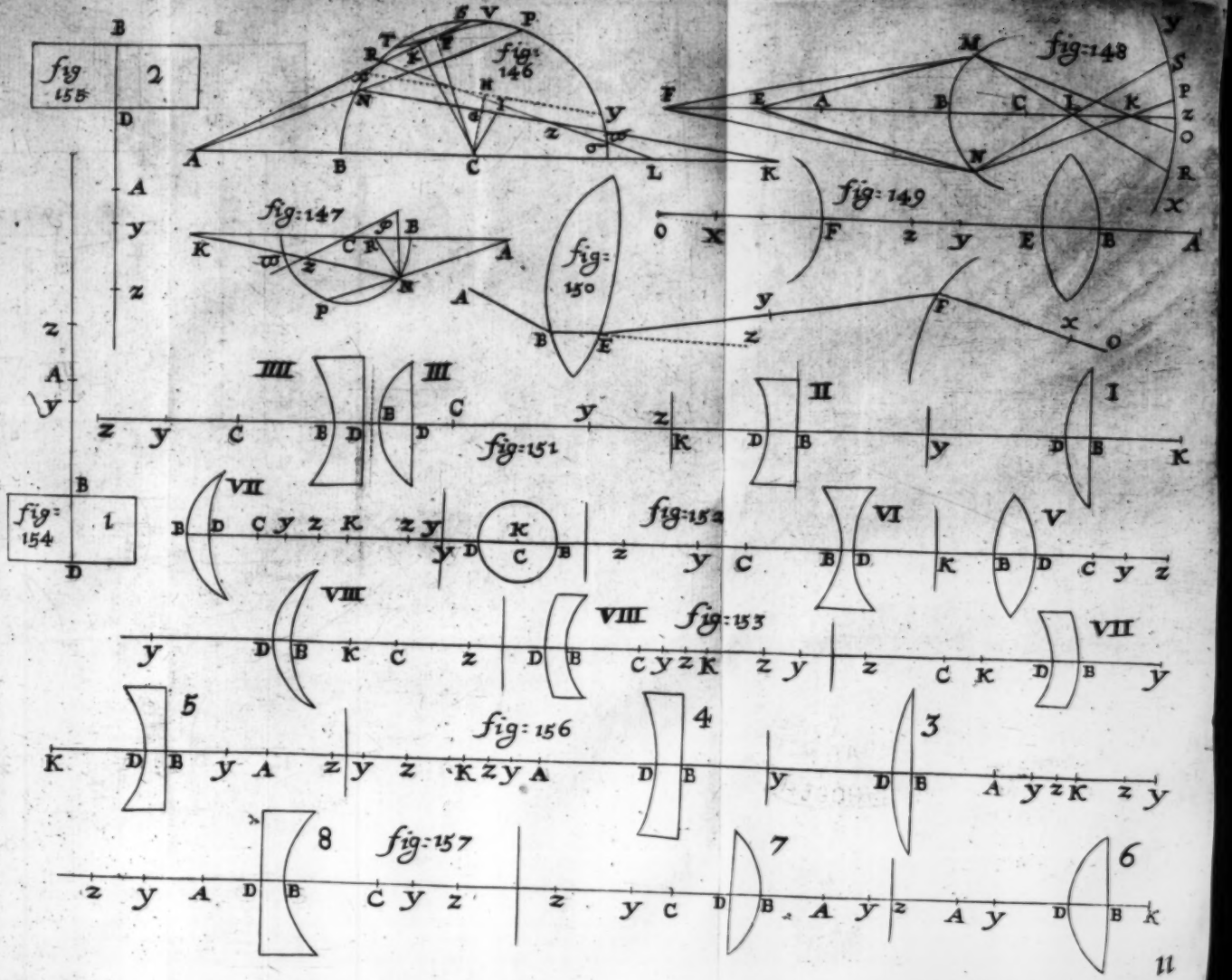


fig 155
2
fig: 146
fig: 148
fig: 147
fig: 149
fig: 150
fig: 151
fig: 152
fig: 153
fig: 154
1
fig: 156
fig: 157
3
4
5
6
7
8
I
II
III
IIII
V
VI
VII
VIII

Fig. 158, 159.

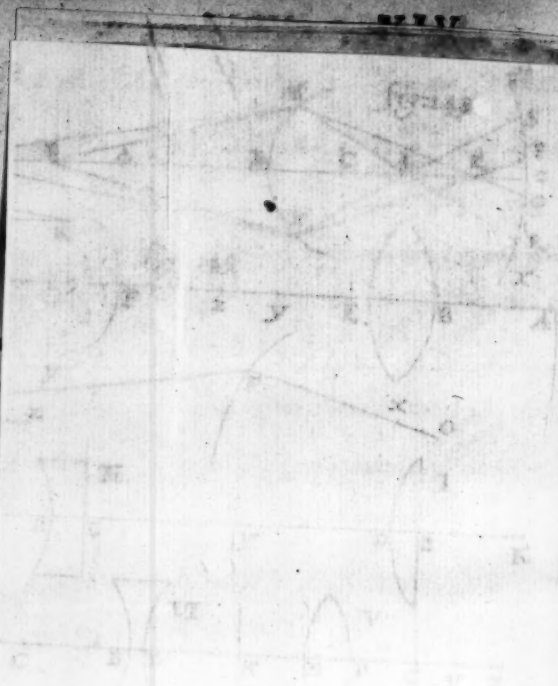


Fig. 159.

Si A cadat extra BC, fiat $AB - \frac{R}{I}AC . AB :: BC . BZ$; sin A cadat inter B, C; fiat $AB + \frac{R}{I}AC . AB :: BC . BZ$; deinde fac $\frac{I}{R}KZ - DZ . DZ :: DK . DY$. Fig. 159.

Coroll. Ad integram Sphæram converg.

Si punctum A extra BC ponatur, fiat $AB + \frac{I - 2R}{I}AC :: BC . CY$. sin A cadat inter B, & C; fiat $AB + \frac{2R - I}{I}AC . AC :: BC . CY$; & cape CY ad partes centri versus A.

XV. *Ad lentem convexo-concavam diverg.* Fig. 160, 161.

XVI. *Ad lentem concavo convexam converg.*

1. Si $AB \supset \frac{R}{I}AC$; puncta Z, & Y versus A cadunt, facto $\frac{R}{I}AC - AB . AB :: BC . BZ$; & $\frac{I}{R}KZ - DZ . DZ :: DK . DY$.

2. Si $AB = \frac{R}{I}AC$; fac $I - R : R :: DK . DY$; & cape DY versus A.

3. Si $AB \subset \frac{R}{I}AC$; fac $AB - \frac{R}{I}AC . AB :: BC . BZ$; & cape BZ adversus A. Jam quum Z cadit extra DK, tum primò si $\frac{I}{R}KZ \subset DZ$, fac $\frac{I}{R}KZ - DZ . DZ :: DK . DY$; & cape DY versus A.

4. Secundò, si $\frac{I}{R}KZ = DZ$, imago infinitè distabit.

5. Tertiò, si $\frac{I}{R}KZ \supset DZ$, fac $DZ - \frac{I}{R}KZ . DZ :: DK . DY$, & sume DY adversus A.

6. Sed quando Z inter D, & K cadit; fiat $DZ + \frac{I}{R}KZ . DZ :: DK . DY$; & sumatur DY adversus A.

XVII. *Ad*

Fig. 160, 161, 162.

XVII. *Ad lentem concavi convexam diverg.*

XVIII. *Ad lentem convexo-concavam converg.*

Si A cadat extra BC, fiat $AB - \frac{R}{I} AC . AB :: BC . BZ$; sin A cadat inter B, & C; fiat $AB + \frac{R}{I} AC . AB :: BC . BZ$.

1. Jam cùm Z cadit extra DK, tum primò si $\frac{I}{R} KZ \sqsubset DZ$, fac $\frac{I}{R} KZ - DZ . DZ :: DK . DY$, & cape DY adversus A.

2. Secundò, si $\frac{I}{R} KZ = DZ$; imagò infinitè elongabitur.

3. Tertiò, si $\frac{I}{R} KZ \sqsupset DZ$, fac $DZ - \frac{I}{R} KZ . DZ :: DK . DY$; & sume DY versus A.

4. Sed quando Z inter D, & K cadit, fiat $DZ + \frac{I}{R} KZ . DZ :: DK . DY$; & accipiatur DY versus A.

Hisce subnectam sequentia; non contemnendum in *Engyscopicis* usum præ se ferentia *Problemata*.

Fig. 163.

I. *Dati puncti propinqui A perfectam imaginem per lentem concavo-convexam in aliud datum punctum Z lenti vicinius projicere.* (perfectam imaginem intelligo, quæ resultat ex omnibus, quos ipsum A diffundit, radiis in ipsa readunatis.)

Fiat $I - R . R :: AZ . ZB$. & dividatur ZB in C, ut sit $CB . CZ :: I . R$. tum centro C describatur circulus EBF. item centro Z intervallo quovis ZD (majori quam ZB) describatur circulus GDH; factum erit; nempe lens EFGH puncti A perfectam imaginem in punctum Z projiciet.

Nota, datâ CB puncta A, Z è propositis facilè determinari.

In vitro, si $CB = 15$, erit $\left\{\begin{matrix} ZC = 9 \\ ZB = 24 \end{matrix}\right\}$ & $\left\{\begin{matrix} AZ = 16. \\ AB = 40. \end{matrix}\right.$

Adnotetur etiam per lentem EGHF ad Z tendentes radios ad A refringi. *Hujusmodi*

Hujusmodi Vitrum Myopes juvat; pro quibus ità constructur: sit Z D distantia, ad quam optimè cernunt; sumatúrque Z B utcunque paullo minor quàm Z D; & fiat $CB = \frac{1}{3}ZB$; tum centro C per B describatur circulus E B F, & centro Z per D circulus G D H describatur; ipsi (Superficiei G D H oculum admoventes) punctum A distinctè spectabunt, velut ad Z situm.

Quod si velit *Myops*, ad distantiam itidem Z D distinctè cernens, assignatum punctum A contemplari; adsumpto, ut priùs, liberè puncto B, fiat $CB = \frac{2AB \times ZB}{5AB - 3ZB}$; & reliqua fiant, ut priùs.

II. *Dati puncti A perfectam imaginem, etiam ope lentis concavo-convexæ, in datum aliud punctum Z longinquius projicere.* Fig. 164.

Fiat A Z. A D :: I — R. R. item dividatur A D in C, ut sit C D. C A :: I. R; & centro C per D describatur circulus E D F. item centro A, quopiàm intervallo A B (minori quàm A D) describatur circulus E D F; factum erit; nempe lens E D F puncti A imaginem in punctum Z projiciet.

Datâ C B, puncta A, Z viciſſim è propositis innotescunt.

In vitro, si C B = 15, erit $\left\{\begin{matrix} ZC = 9. \\ ZB = 24. \end{matrix}\right\}$ & $\left\{\begin{matrix} AZ = 16. \\ AB = 40. \end{matrix}\right\}$

Itidem & hìc, per lentem E F versus Z tendentes radii in A refringuntur.

Hinc *Presbytis* utile conficiatur *Vitrum*, hoc pacto: Ad intervallum Z D hi distinctè videant. Secetur Z D in A, ut sit $AD = \frac{1}{3}ZD$. item sit $CD = \frac{1}{3}AD$ (vel sit $CD = \frac{1}{3}ZD$) centróque C per D describatur circulus E D F. item utcunque sumpto puncto B (citra D nempe, versus A) centro A per B describatur circulus E B F. lente E F dicti *Presbytæ* punctum A distinctissimè conspicient. ||

Hùsce demum in cumulum adjiciatur ab amico communicatus *Modus elegans ac expeditus cujuscunque casûs imaginem Geometricè designandi; ut & lentem describendi, quæ imaginem in datum punctum projiciet.*

1. *Imaginem designare.*

E centris, & verticibus circulorum lentem constituentium erigantur ad axin perpendiculares K j, B P, D Q, C I; deinde per punctum A ducatur quævis recta A P I secans B P, & C I in P, & I. fac C I. C R :: I. R. agatur recta R P secans D Q, & K ϱ in Q, & ϱ; fac K ϱ. K j :: R. I; & agatur ı Q, quæ producta secabit axin in Y, loco imaginis quæsito. || Fig. 165, 166, 167.

2. *Re-*

Fig. 168. 2. *Reliquis datis, lentem describere.*

Sumantur ad arbitrium B Y distantia lentis ab imagine, B D crassities lentis, & alter circulorum lentem constituentium ut (in hoc exemplo) anterior E B F, cujus centrum sit C; & ad ista puncta B, D, C erigantur B P, D Q, C I ad axin perpendiculares. deinde per punctum A ducatur recta quævis A P I secans B P, & C I in P, & I. fiat C I. C R :: I. R; & agatur R P secans D Q in Q. fiat D Q. D S :: I. R; & agatur S Y secans R P productam in ϒ; à quo demittatur perpendicularis ϒ K; & centro K intervallo D K describatur circulus E D F; erit E B F D lens quæsita.

Hic autem in nimium excrescenti spatium Lectioni defigatur limes.

LECT. XV.

BEne longo circa lucis reflectiones, quatenus hæ visum afficiunt, instituto stadio metam nunc opportunè fixuri videmur, ea quomodocunque prosecuti, quæ πρωτοφανῆ nobis visa, nec adeò pervulgata se objecerant. quod autem magnitudines objectas attinet (quas utique de punctis tantùm radiantibus agentes omnino videamur omisisse) quales nimirum illæ ex hujusmodi radiorum inflectionibus quoad situm, figuram, quantitatem mutationes subeunt, id fermè totum passim atque fusiùs tractatum prostat, nec animus est mihi toties actum agere, vel è trivio petita quæque huc transferre. quin & eò spectantia pleraque cuncta de jam definitis ac ostensis haud difficili negotio colligi posse videntur; singulorum nempe cujusvis objecti punctorum (extremorum præsertim ac mediorum) apparentias indè determinando. verùm nec ea penitus neglectui habita, ad subsequentem quoque regulam (seu monitiunculam) pressiùs animum advertentes forsan autumabitis. Si qualem assignata quævis superficies inflectens (simplex aut composita) magnitudinis cujusvis expositæ speciem exhibet (ampliorem nempe vel contractiorem, directam aut inversam, confusam distinctámve, seu quovis alio modo demutatam) internoscere cupiatis,

id

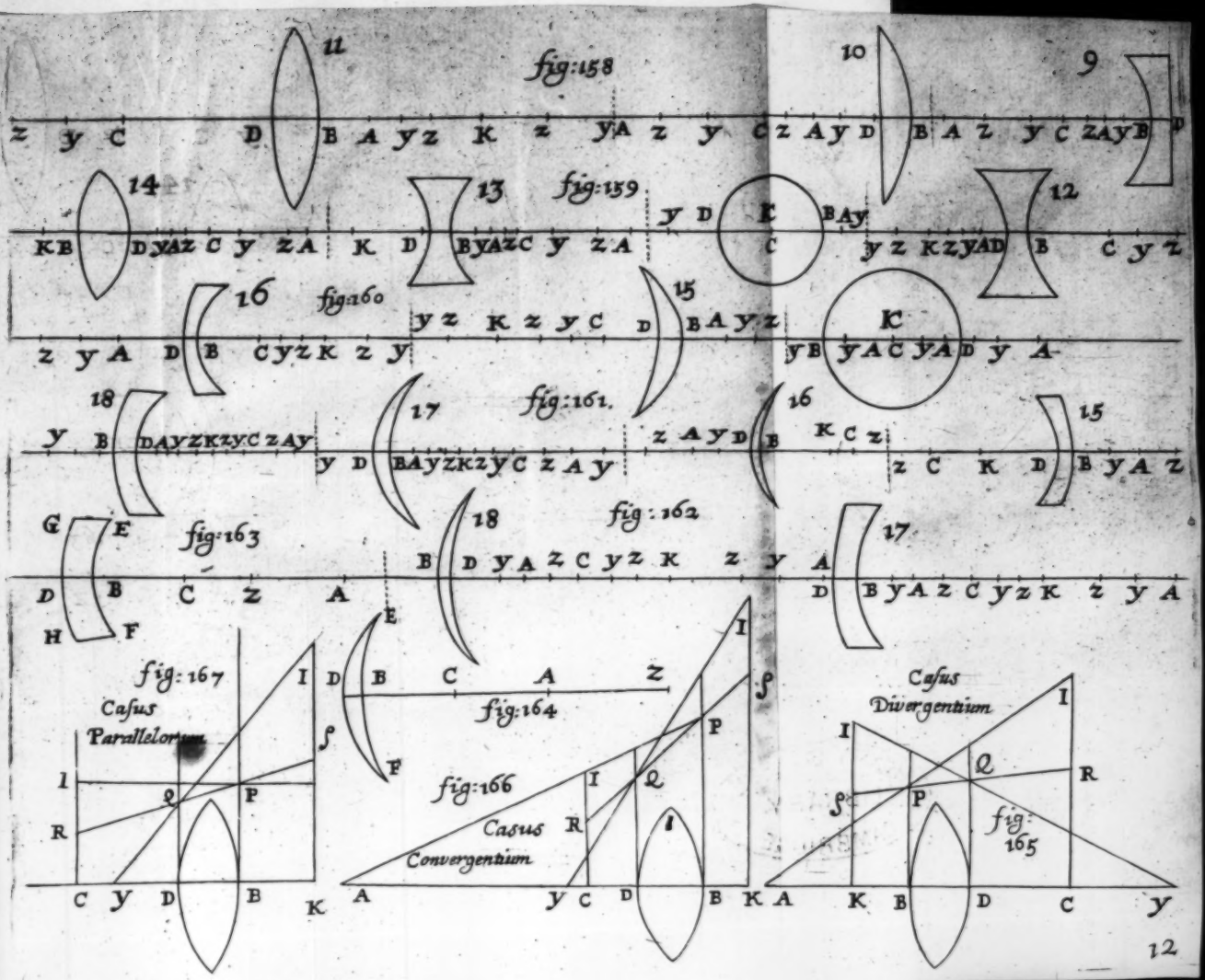
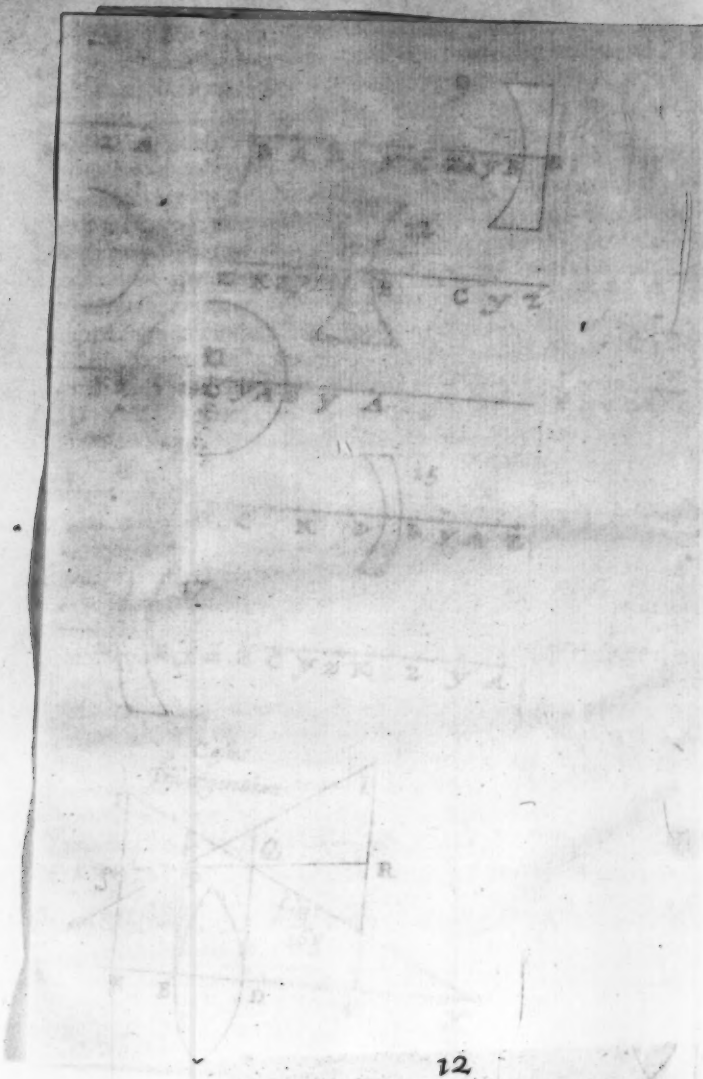


fig:158
fig:159
fig:160
fig:161.
fig:162
fig:163
fig:164
fig:165
fig:166
fig:167
Casus Parallelorum
Casus Convergentium
Casus Divergentium



id quadantenus hoc modo pertentantes attingetis. Oculi centrum (quale dari passim supponitur, ei saltem analogum quid dari videtur, nec indè, quoad illam quæ præ manibus rem, erroris quicquam proveniet) oculi centrum, inquam, ubicunque pro libitu constitutum ceu punctum radians concipiatur; tum ex eo duo prodeuntes radii ad propositam superficiem (eo quem hujus exigit natura vel proprietas specialis modo) inflectantur. tum inter hos inflexos collocatum intelligatur objectum; ejus certè species inter duos primos ab oculi centro procedentes radios consistet, quæ cum ipso (quoad apparentem anguli quantitatem, punctorum correspondentium positionem, & reliquas affectiones) objecto comparata voti compotes vos reddet; & id quidem perfectiùs, si extremorum ac mediorum præsertim objecti punctorum justas imagines, ex doctrina hactenus tradita, velitis investigare. ab appositis exemplis res manifestior evadet; in quibus notetur punctum O semper oculi centrum, rectam O B A radiationis axem (superficiebus inflectentibus perpendicularem, & objecta in partes æquales dirimentem) denotare.

Exemp. I. *Proponatur Superficies plana medii refringentis densioris (aquæ si placet, aut vitri) objectum continentis*, veluti Superficies à recta M N repræsentata. & ab oculi centro O prodeant utcunque duo radii O M, O N; qui in M F, N G refringantur; inter hos jam designetur objectum F A G (ab axe O A bisectum) hujus è medio F G M N spectati species (vel apparentia) alicubi consistet inter rectas O M, O N, veluti puta ad φ α γ. cùm autem (ut ex hujusce superficiei natura, communique refractionum lege palàm est) sit angulus φ O γ major angulo F O G; hæc objecti speciem amplificat inflectio. item cùm puncta (sibi respondentia) F, φ; & G, γ ad easdem respectivè partes jaceant, ab eadem objecti posito non immutatur. quod si punctorum φ, α, γ positio juxta superiorem doctrinam strictiùs exquiratur, de totius imaginis φ α γ figurâ distantiâque satìs accuratum feretur judicium. Fig. 169.

Exemp. II. *Proponatur corpus densum* P M N Q, *Superficiebus planis parallelis* (M N, P Q) *comprehensum*; & ab oculi centro O prodeuntes radii O M, O N ad superficiem M N refringantur in M P, N Q; horum verò ad Superficiem P Q refracti sint P F, Q G (qui, propter incidentias (ad M, P, & N, Q) pares, ipsis O M, O N æquidistabunt) inter P F, Q G statuatur objectum F A G, cujus sit imago φ α γ; tum verò manifestum est hìc se rem similiter habere ac in Exemplo præcedenti. Fig. 170.

Fig. 171. *Exemp.* III. *Proponatur circulus ſpecularis concavus* MBN, & radiorum OM, ON reflexi ſint MF, NG (ſe decuſſantes in H, & cum ipſis OM, ON concurrentes punctis X, Y) inter hos collocetur objectum FAG; ejus itidem imago rectis OM, ON interjacebit, puta ad φαγ. comparando jam angulos apparentes FOG, φOγ, clarè vides objecti FAG ſpeciem imminui, item cernis puncta ſibi reſpondentia F, φ, & G, γ ad alias ac alias partes jacere, ſeu objecti ſitum hinc inverti. Quod ſi intra angulum & ſpatium XHY ſtatui concipiatur objectum, clarum eſt hinc ejus quidem ſpeciem ampliari, ſed adhuc ſitum inverti. ſin inter ipſa XY conſiſtat objectum, ejus itidem invertetur ſitus, at quantitas non immutabitur. demùm ſi intra angulum NHM conſtituatur objectum, puta RLS, cujus imago ſit φλσ; evidens eſt hujuſce ſpeciem creſcere, ſitúmque retineri.

Fig. 172. *Exemp.* IV. *Proponatur circulus Specularis convexus* MBN; factiſque ſimiliter ac in eo quod immediatè præceſſit omnibus; ne plura prodigam verba, vides objecti FAG ſpeciem (φαγ) coarctari, ſed ejuſce poſitionem eandem perſiſtere.

Fig. 173. *Exemp.* V. *Proponatur lens aliqua (exempli gratiâ, lens plano-convexa)* MBNQP. Radii OM, ON ad ſuperficiem MBN refringantur in MP, NQ; tum ipſi MP, NQ ad ſuperficiem PQ refringantur in ipſos PF, QG (ſeſe decuſſantes in H, & cum ipſis OM, ON concurrentes ad X, Y) vides jam in prima figura, ſi objectum FAG infra XY (verſus H) ſtatuatur, ipſum ab imagine φαγ majus, quàm obtutu ſimplice, repræſentari. Quod ſi inter ipſa puncta X, Y ſubintelligatur collocatum, ejus quantitas neutiquam immutabitur. at ſi ſupra XY ſtatuatur objectum RLS, ejus ſpecies, ad φλσ conſpicua, diminuetur; ubique verò punctorum correſpondentium poſitio directa permanebit.

Fig. 174. In altera verò figura (ubi refracti PF, QG verſus axem procurrentes convergunt) cùm objectum FAG citra punctum H ſumitur, vides ejus ſpeciem quantitate adauctam, at ſitu non mutatam. verùm objecti RLS ultra concurſum H poſiti imago φλσ nedum prototypo major eſt, at quoad ſitum etiam eidem inverſa.

Et hoc quidem pacto nulla non lens pro varia vel objecti vel oculi poſitione, objecti ſpeciem aliam exhibet ac aliam; nunc dilatat, tunc contrahit; modò rectam dat, mox inverſam, ſubinde propiùs adducit, nonnunquam longiùs amovet. Singulos caſus ad examen facilè rediges hoc ad ſpecimen aciem mentis intendendo.

Quinimo

Quinimò methodum hanc leviculam adhibendo pleraſque ſuperficierum quarumvis inflectentium hujus generis affectiones (illas nempe quæ magnitudinum apparentes quantitates, poſitiones, diſtantias, figuras reſpiciunt) complurimumque *Phænomenæ* cauſas ipſe ſtatim operâ levi deprehendes; quibus in expreſſius deducendis libri plures ad tantam molem extumeſcere vel poſſunt, vel ſolent; ut mihi ſaltem opus non ſit hujuſmodi plura congerere. veruntamen nè pars hæc nimium deficiat, & quoniam nonnulla ſuccurrunt animadverſione non indigna, de magnitudinum etiam apparentis, tam *Dioptricis* quam *Catoptricis*, ſpecialia quædam proponam; ex verò commodius ſequentem præſtolabuntur Lectionem.

Huic interim, nè abnormiter curta ſit, aliquatenus explendæ *Problemation* hoc adnectam:

Exponatur oculo, cujus centrum O, longinquum objectum FG, ab oculi, circulique refringentis axe AB biſectum, datâſque ſit angulus ſimpliciter (oculo nempe nudo) apparens POG. item aſſignetur punctum Z, quod imago ſit puncti A à circulo refringente facta; datus ſit denuò ex refractione apparens angulus POQ; propoſitum eſt circulum iſtum refringentem deſcribere (vel determinare). Fig. 175.

Analyſis. Factum eſto; ſit nempe circulus BN, qualis requiritur, cujus ſit centrum C, vertex B; & qui rectam OP in N ſecet. ducatur CY ad OF parallela, rectæque OP occurrens in Y, & connectatur CN. cum itaque ſit NY refractus radii ad FO, vel CY paralleli; erit CY. YN :: R. I. ergò ratio CY ad YN datur; & cum præterea angulus Y (dato FOP æqualis) detur, etiam (in triangulo CYN) angulus CNY innoteſcet. itaque triangulum CON ſpecie datur; unde ratio CO ad CN (vel CB) datur. eſt autem CB. CZ :: I — R. R. ergò ratio CB ad CZ datur. itaque ratio CO ad CZ quoque datur; unde ratio CO ad OZ datur. verùm OZ datur; ergò etiam CO datur. hinc demùm & ipſa CB datur.

Componitur autem in hunc modum. In OF utcunque capiatur $O\sigma$, & fiat $O\sigma . O\sigma :: R. I.$ & connectatur $\sigma\zeta$, ducaturque ZRS ad $\zeta\sigma$ parallela. tum fiat $OZ . ZT :: I - R. R$ (unde componendo $OT . ZT :: I . R$) item $V = \sqrt{ZT \times ZS}$; & $X = \sqrt{OZq - Vq}$; tum $X. OZ :: OZ. Y.$ denique $X. Y :: OZ, OC$ (unde erit $Xq . OZq :: OZ . OC$; hoc eſt $OZq - Vq . OZq :: OZ . OC$; hoc eſt $OZq - ZT \times ZS . OZq :: OZ . OC$). per C verò ducatur CN ad ZS parallela, ſecans OP in N. denique centro C per N ducatur circulus BN, is propoſito ſatisfacit.

Nam ob $OZq - ZT \times ZS : OZq :: OZ . OC$, erit OZ cub $= OC \times OZq - OC \times ZT \times ZS$. transponendoque $OC \times ZT \times ZS = OC \times OZq - OZ$ cub. atqui propter $OZ . ZS :: OC . CN$. est $OZ \times CN = ZS \times OC$. quare $OZ \times CN \times ZT = OC \times OZq - OZ$ cub; adeoque (elidendo OZ) erit $CN \times ZT = OC \times OZ - OZq$. vel $CN . OC - OZ :: OZ . ZT$; hoc est $CB . CZ :: OT . ZT$. & componendo $BZ . CZ :: OT . ZT :: I . R$. itaque primò liquet punctum Z imaginem esse puncti A, ex refractione factam ad circulum BN. quinetiam ob $CY . YN :: O . Oa :: R . I$, palàm est NO refractum esse radii ad CY, hoc est ad FO parallelì. liquido proinde constat propositum. ||

In hoc casu debet esse $OZq - ZT \times ZS$. Haud absimili ratione quoad alios casus (ut si circuli refringentis cavum objecto exponatur, &c.) peragetur negotium. ego specimen tantùm *insistui Problematis*, juxta quod visibilis objecti species per refractionem circularem secundùm præstitutas quantitatem atque distantiam utcunque possit immutari. ||

APPENDICULA.

UT hæc paullò strigosior Lectio nonnihil incrassetur, faciam hìc (quanquam alienore loco) quod alibi (si mihi tunc in mentem venisset) factum oportebat; raciociniis nostris adversantem, à viro doctissimo (alioquin opinor rarò dormitante) commissum, paralogismum, nè cui fraudi sit, detegam ac amoliar; unáque doctrinam nostram confirmabo. horsum è præmissis consequens, sed & experientiæ (ut videbimus) consonum hoc præsterno: E refractione quavis (nec non è reflectione ad circulum) duobus oculis apprehensum objectum (puta lucidum punctum A) revera duplum apparet, seu duas (ad minus) obtinet imagines.

Fig. 176. Nam à puncto A exeuntes inflectenti MN incidant duo quicunque radii AM, AN; quorum inflexi sint ME, NF; concurrentes in X; in his autem uspiam constituantur oculorum centra O, P. quòd puncti A imago nulla ad occursum X existat, è supra positis, ac probatis consectatur (omnes enim imagines ad illa consistere docuimus inflexorum puncta, ad quæ nulli illos alii inflexi intersecant) itaque duæ sunt imagines puncti A, una in inflexo EM (qualis α) ad oculum O pertinens; altera in inflexo FN (qualis α) oculo P deputanda.

Hinc liquet etiam magnitudinis cujusvis hoc modo spectatæ duplicem imaginem haberi.

Huic

Huic effato si contraria obtendatur experientia, monstrans subinde duntaxat unam imaginem apparere; regero, in refractione quidem ad superficiem planam apparenter hoc plerumque contingere; quoniam imagines istæ duæ (quales α, α) ita sibimet ipsis, ita refractorum concursui X vicinæ sunt, ut ipsarum intervallum discerni nequeat, ipsæque (sicut in simili casu obvenire mox ostendemus) velut in unam imaginem interceptibiliter coalescant, ast in aliis diversi generis inflectionibus, etiam sensu contestante, manifestè secus apparet, id quod cùm è compluribus admodum obviis experimentis constare possit, unum saltem ac alterum proponemus. Speculo B N M exponatur objectum A; tum oculis, velut ad O, P constitutis, apparebit ejusce duplex species α, α; quarum illa (α) clauso oculo O, hæc (α) clauso P disparebit. Fig. 177, 178.

Notetur autem, si placet, imaginum α, α intervalla (pro vario oculorum situ) nunc magis, nunc minùs deduci, sic ut subinde coadunari videantur. Nempe si oculus P ad F concipiatur translatus, ducaturque F G ipsi P O parallela, & æqualis; unde jam & oculus O in C positus concipiatur; quoniam F E minor est quàm F G, radius M O per G non transibit; transeat alter inflexus L G; in hoc itaque jam consistet imago α, ab altera α magis elongata. Reliquarum hujusmodi diversitatum haud dispar assignari poterit ratio.

Adjungatur & hoc, an passim observatum nescio, dignum certè quod observetur: Ad speculum concavum R S M N faciem tuam F A G (speculo propiùs ad motam) contemplare. Et primò quidem oculo O (altero P occluso) cernes ejus imaginem φαγ; rursus (oculo O occluso) altero P conspicies imaginem fag, à priore φαγ aliquantùm deflectentem; demùm utroque simul oculo recluso spectans illas in unam coalitas percipies; seu, speciem unam aspicies, perquam notabili discrimine, ampliorem priorum singularum alterutrâ. Fig. 179.

Exhinc, obiter, suspicari licet, etiam intuitum simplicem adhibentibus objecta binis oculis spectata tantillo majora videri, quàm uno; speciebus ità coëuntibus, ut non exquisitè congruant.

Unicam præterea subdemus instantiam: Per sphæram vitream (aut si mavis, per phialam conicam aut cylindricam aquâ repletam) M B N translucentem lucernulæ flammam A spectà, ejus duas imagines α, α observabis (pro oculorum situ magis à se minúsve dissitas) quarum una (α) clauso oculo O, altera (α) clauso P evanescet. Fig. 180.

Videtur hæc instantia vel sola sufficere vulgari sententiæ refellendæ; juxta quam (ut *Keplerus* alicubi colligit) puncti A simplex imago ad punctum X consisteret. *Paralipom. pag.* 178.

Has

Has instantias, facilitatis gratiâ, ità proposuimus, quasi punctum A, unà cum duobus oculis O, P in plano existeret ad superficiem inflectentem recto. id quod utrùm in experiendo præcisè contingat nécne, parùm refert, duas utcunque species apparere liquet. quin facilè concipitur etiam eo posito rem non aliter se habituram.

His prælibatis, illud discutiamus, quod innuimus, ψευδογράφημα; quo nempe *P. Herigonius* propositionem hanc suam comprobatum it: "Si oculus, & aspectabile sint in diversis mediis sè mutuo contingen-"tibus, imago apparebit in concursu catheti, & radii ab oculo per "punctum refractionis directè producti.

In Dioptr.

Fig. 181.

Sit utique punctum F in medio densiori H L M N collocatum, quod ad oculos A, B radios F E A, F D B emittat refractos ad E, & D; & rectæ A E, B D conveniant in C; sit autem superficiei refringenti perpendicularis recta F G; erit (inquit) puncti F imago in recta F G. id quod ità demonstrat: Quoniam dicta imago tam in refracto A E, quàm in refracto B D existit, ergò in horum intersectione C existet. verùm intersectio C in recta F G existet; quoniam hæc communis est sectio planorum A E F, B D F superficiei refringenti rectorum. ergò liquet propositum.

In hanc demonstrationem adverto; 1. Supponit ea refractos A E, B D concurrere; quod tamen falsum est, præterquam in uno vel altero casu; quum nempe planum A B F in eodem existit cum ipsa recta F G plano; vel, cùm puncta A, B sunt in superficie coni recti, cujus axis est recta F G. quod si prior casus ponatur, è suprà demonstratis manifestum est refractos A E, B D non in recta F G, sed intra angulum F G H convenire; quod è principiis nostris elicitum illum saltem constringere debet, qui principia ista admittit ac amplectitur. 2. Hinc, illa demonstratio ipsam se perimit: Nam, quoniam (in posito casu) puncti F imago tam in recta A E, quàm in recta B D existit, adeóque in harum concursu; concursus autem iste *non* est in recta F G; ergò liquet dictam imaginem extra rectam F G versari. 3. Supponit iste discursus (ut & suppar ille jamjam prolatus) puncti F unicam oculo utrique imaginem apparere; quod πρῶτον ψεῦδος erat, à nobis paullò supra refutatum. Enimverò diversi oculi sunt reipsâ diversi spectatores. hæc, opinor, ratiocinium illud satis enervant. ||

Lect.

Lect. XVI.

I. *Punctorum ex inflexione determinatis apparentibus locis*, conquiescere possem, siquidem exinde magnitudinum apparentiæ deducuntur, quotlibet in ipsis existentium punctorum imagines designando. cæterùm nè justo parcius in hac parte, vel illiberalius egisse videar, etiam *de rectarum linearum (consequenter & planarum superficierum, quibus distincte visui repræsentandis natura præcipuè consuluisse videtur) apparentiis & imaginibus expressiora specimina quædam haud gravabor adnectere*. de quibus etiam circa reliquarum magnitudinum apparentias propius ac promptius fiat judicium.

II. Notetur autem imprimis, Sicuti (quod sæpiùs in antedictis habetur insinuatum) cujusque puncti quodammodò duplex est imago, una simplex, absoluta, principalis; illa scilicet, quæ in recta versatur ad superficiem inflectentem perpendiculari, perque radians punctum simpl ac oculi centrum transeunte (hoc est in communi lucidæ radiationis, superficiei reflectentis, ipsiusque visionis axe) altera verò relata, mutabilis, ac minus præcipua; quæ talis est respectu oculi extra rectam inflectenti superficiei perpendicularem arbitrariè constituti; ità pari fermè modo duplex cujusque magnitudinis imago concipi potest; una quidem absoluta (quam saltem hoc nomine designabo) quæ ex punctorum singulorum in ipsa existentium absolutis imaginibus quasi conflatur, illas saltem comprehendit (qualis in objecta congrua superficie vividè deformaretur; qualisque videretur oculo ad infinitam ab inflectente superficie distantiam ritè collocato) altera verò relata, quæ oculum respicit ubivis in certa positione constitutum; quid velim, & quare sic distinguam ab exemplis benè multis in decursu proponendis luculenter apparebit.

III. *Super-*

Fig. 182. III. *Superficiem planam media dirimentem (aquam ſi placet ac aërem)* repræſentet recta P Q, & aquæ inſit recta F P ad P Q perpendicularis. ſiat autem F P. X P :: R. I, erit X P imago abſoluta rectæ F P; continet illa ſcilicet omnes locos punctorum, quæ in F P, oculo apparentes in ipſa F P ſito. verùm ſi ponatur oculus uſpiam extra F P, velut ad O, ei tota F P citra X P apparebit. tranſeat videlicet alicujus radii F M refractus per O, & protrahatur O M, ut occurrat ipſi F P in K. eſt ergò (ſecundum præmonſtrata) punctum K inter X, & P. itidem (è prius oſtenſis) puncti F imago quæ in refracto O M K, ad oculum O relata, inter K, & M cadit, veluti puta ad φ. ſimili ratione cujuſvis alterius in ipſa F P accepti puncti, ceu R, imago (cogitatu) citra rectam X P, verſus oculum, jacet. totius itaque rectæ F P imago talis eſt, qualem curva linea φ ϱ P refert. quòd ſi P F infinitè protrahatur, ejus totius imago P ϱ ϱ verſus aſymptoton O B A, ad P F parallelam, accedens excurrit.

IV. *Delineatur autem curva P ϱ φ hoc modo.* ab O ducatur utcunque recta O M K ſecans rectam P Q in M; & (poſito fore S = √Rq − Iq) ſit $PH = \frac{Sq \times PM\,cub}{Iq \times FPq}$; atque per H ducatur H φ ad P R parallela, ipſi O K occurrens in φ; erit φ in dicta linea; nempe, ſi O M K ipſius M F refractus concipiatur, erit punctum φ ipſius F imago. eodem modo reliqua lineæ P ϱ ϱ puncta deſignantur.

Fig. 182. V. Quinetiam adſumptâ rectâ F G ad P Q parallelâ, ductâque G Q ad F P (vel A B O) parallelâ; item per X ductâ X α Y ad P Q parallelâ, erit quidem recta X α Y rectæ F A G imago abſoluta; verùm ejus imago ad oculum O relata citra rectam X Y tota jacet, eámque curva φ α γ repræſentat, admodum jamjam præſcriptum punctatim delineabilis. itaque compoſitæ lineæ P F G Q, circa axem O B A rotatæ, imago fornicem referet arcuatam. id quod experiri vos velim vaſculi cylindrici aquâ repleti ſuperficiem inſpectando.

Fig. 183. VI. Quòd ſi recta viſibilis F G ad P Q inclinata ſit, cum ea conveniens in V; & connectatur X V, erit rurſus X Y ipſius F G imago abſoluta; relatam verò curva φ α γ repræſentat.

Fig. 184. VII. Quòd ſi viciſſim *oculus O in aqua ponatur conſtitutus*, & ab indè reſpiciatur recta P F in aëre poſita, fiátque rurſus P F. P X :: R. I;

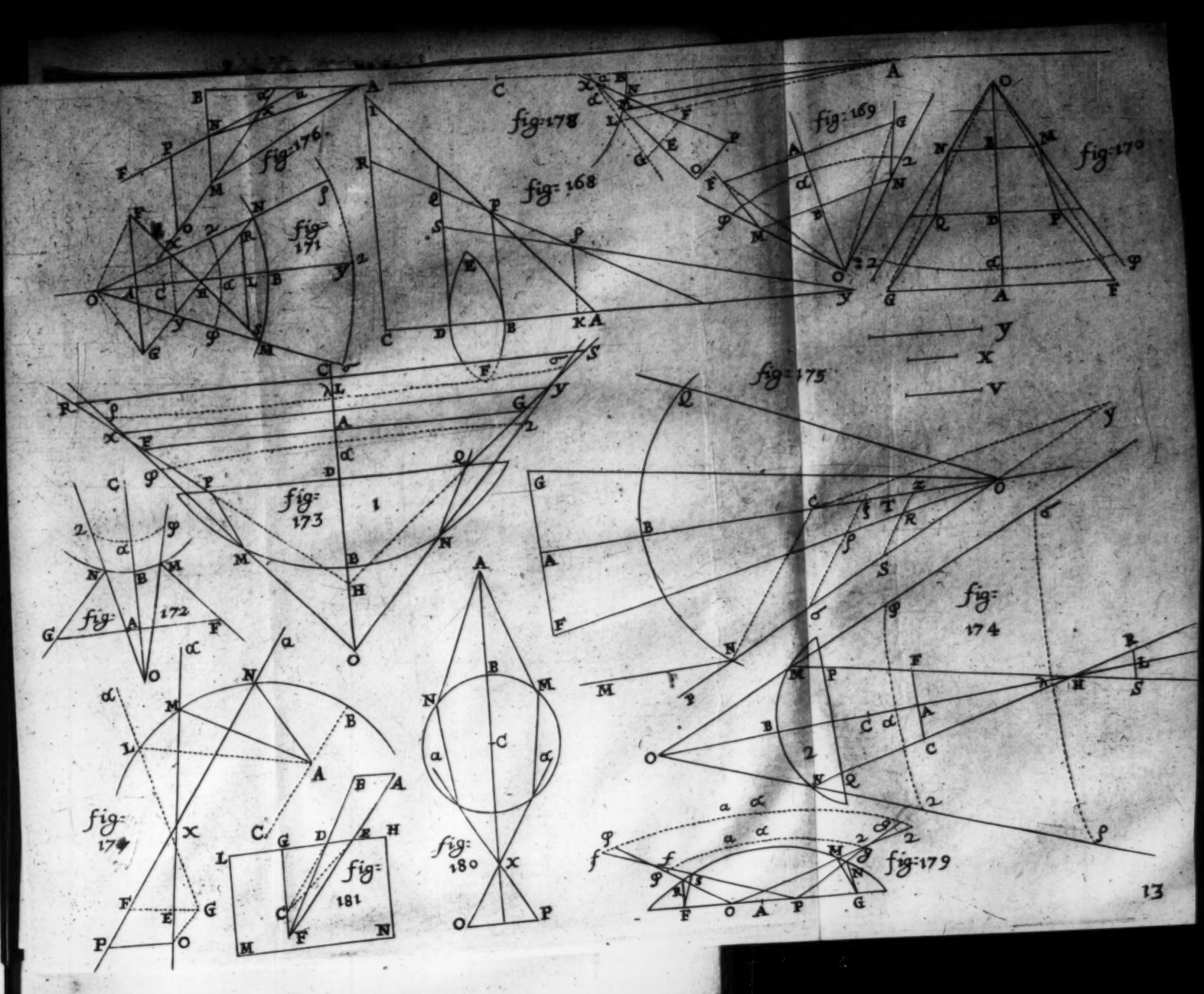


fig: 176
fig: 178
fig: 168
fig: 169
fig: 170
fig: 171
fig: 173
fig: 172
fig: 175
fig: 174
fig: 177
fig: 180
fig: 181
fig: 179
y
x
v

Fig. 181.

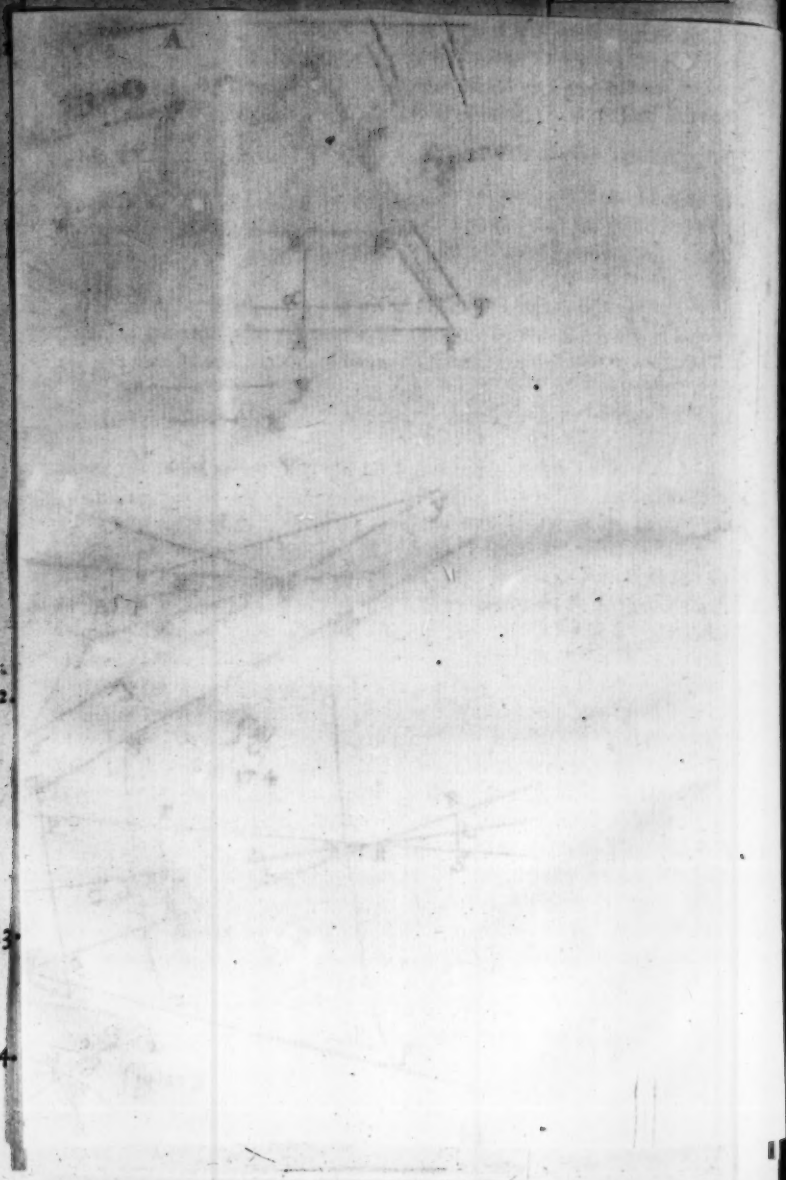


Fig. 182.

Fig. 183.

Fig. 184.

R : I, erit quidem X P imago rectæ F P absolutæ, at ejusdem imago relata (puta $\varphi\alpha\gamma$) ultra P F R jacet, ab illa sensim reclinans, ejusque puncta quælibet ita signantur. Ab O ducatur recta O K utcunque rectam P Q secans in M, & sit K M ipsius F M refractus, tum (posito rursus $S = \sqrt{Iq - Rq}$) fiat $PH = \frac{SQ \times PM}{Iq \times PFq} qPM$, & per H ad P F parallela ducatur $H\varphi$, ipsam O M K intersecans ad φ, erit punctum φ in dicta linea, punctum scilicet F repræsentans. eodemque modo puncta quotlibet alia deprehendes.

VIII. Similiter rectæ F G ad ipsam P Q parallelæ, vel inclinatæ imago relata $\varphi\alpha\gamma$ (in partes arcuata contrarias illis, ad quas prioris casûs imago videbatur incurvata) determinabitur. rem apposita figura satis exprimit.

Hæc autem omnia de suprà comprobatis dilucidè confectantur.

IX. Ac ità quidem circa simplices planas superficies refringentes Fig. 185.
sese res habet. Quòd si corpori parallelis planis M N, $\mu\nu$ terminato exponatur recta F G, Sint rectæ F P, G Q, A D B O ipsi P Q perpendiculares, & fiat B D . B S :: I . R, adsumatúrque $A\alpha = DS$; & fiat A B . $\alpha\zeta$ :: F P . X P; & per X, α ducatur recta $X\alpha Y$, erit $X\alpha Y$ lineæ F A G imago absoluta. Ergò ejus imago ad oculum O relata (in hoc casu) citra ipsam $X\alpha Y$ versus superficiem $\mu\nu$ nonnihil incurvata disponetur, qualem exhibet linea $\varphi\alpha\gamma$. id quod ex eo satis videtur liquere, quòd recta $X\alpha Y$ sit imago respectu oculi in ipsa O B à B infinitè semoti. designari verò poterit hæc imago ad hunc modum. sit *fag* (minusculis elementis indigitata) imago rectæ F A G ad superficiem refringentem $\mu\nu$ relata (hoc est ad oculos in refractis $f\mu M$, $q\nu N$, a D B, reliquisque, nec non in medio $\mu\nu M N$ versus O protenso, sitos) juxta proximè commonstrata delineabilis, tum hujus ipsius *fag* velut in medio M N $\mu\nu$ versus A protenso positæ, ex refractione ad superficiem M N emergens, & ad oculum O relata construatur imago $\varphi\alpha\gamma$ (itidem ad modum nuperrimè præscriptum) hæc rectam F A G per corpus M N $\mu\nu$ spectatam repræsentabit. experientia testis advocetur, ego pluribus in re perplexiore, quàm utiliore supersedeo.

X. Porrò quod *plana specula* (simplicia, vel composita) attinet, in iis palàm est imagines absolutas ac relatas omnino sibi coincidere; quo fit, ut ex objectorum magnitudines, figuras, distantias (situ

tamen nonnunquam inverso) quem exhibuisse [illegible] ita de re (tam facili, totes actæ) scitum, [illegible] ad minima unia, me promovco.

Fig. 186. XI. Sit jam *Circulare Speculum convexum* DMB, cujus centrum C; & per C protendatur recta CBA, in qua sumatur portio quædam AR, fiatque CA.AB::CX.XB; neq; non CR.RB::CY.YB; erit YX imago absoluta rectæ RA; quod si CB bifecetur in Z, erit BZ totius BA ad infinitum exporrectæ imago absoluta; hoc est, illæ tales erunt oculi respectu in ipsa AB constituti. secus autem ubiam collocato oculo, tanquam ad O, totius AB quod conspicuum est. (hoc est quod supra horizontem OT, speculo contiguum extat) supra citraque XB apparebit. Enimvero transeat radii AM reflexus KMO per O; itaque punctum K (quod olim ostensum) supra punctum X, versus A, extat. quinetiam (ex indidem monstratis) puncti A imagines omnes, oculum O respicientes, ex reflexione factæ ad partes BMD, citra CA versus O, cadunt. ejus igitur imago quæ in OK, puta ε, in ipsa KM existet (id quod etiam, ne quis dubitet, exertius mox ostendemus) simili ratione puncti R imago, cogita γ, supra Y, citraque BY jacet. quod si porro per O transeat recta ODLH, quæ reflexa sit rectæ DS ad CA parallelæ (hæc autem quomodo ducatur, antehac declaratum habetur) erit in ODL imago puncti (quale concipiatur S) in ipsa AB infinitè remoti, hæc puta sit ad ϖ. erit itaque curva Hϖε imago totius infinitæ rectæ BAS, ad oculum O relata.

XII. Ita verò linea tali pacto delineatur: Super diametrum CO describatur circulus OTC, & ab O ducatur recta quæpiam OMF, cujus reflexa sit MA; in qua sumatur ME = MF, tum secetur FM in ε, ut sit Fε.εM::AE.AM, erit (è prædem demonstratis) punctum ε puncti A imago, simili modo quotcunque lineæ Bαϖ puncta reperiuntur.

XIII. Quòd autem sit punctum ε citra K (versus oculum) ita constabit. Ducatur FQ ad AM parallela. est ergo angulus FQA par angulo CAM. aft angulus FCA angulo ACE minor est. ergò est CF.FQ⊏CE.AE. atqui CF = CE; quare FQ⊐AE. ergò est FQ.AM⊐AE.AM. hoc est FK.KM⊐Fε.εM. componendóque FM.KM⊐FM.εM. unde KM⊏εM. adeóque punctum ε citra K versus O jacet; Q.E.D.

XIV. Exhinc

XIV. Exhinc *Euclidis*, *Albaceni*, communisque fermè sententia convellitur, quæ rectæ B A rectam B K, infinitæque B S ipsam B L imagines statuit; proindeque corruunt omnia, quæ principio superextruunt isti gratis adsumpto, rationique dissentaneo. Veruntamen *Opticorum novissimus scriptor, eruditissimusque vir*, veterum ipse vestigiis insistens postulatum istud ab experientia stabilitum vult, ejusque veritatem sese deprædicat centies explorâsse, doctrinam itaque nostram invicto sensûs testimonio refutavit. atqui repono, non potuisse illum quantumvis oculatum & sagacem quod obtendit vel semel explorare. nec hoc in casu poterit doctrina nostra tentari, nedum refelli. nam (præterquam quòd perpendicularis C B A situm exactè dignoscere perquam arduum, forsan impossibile fuerit) quum lineola B α ρ σ infinitam, juxta nos, lineam rectam B S repræsentet, ipsúmque punctum σ (infinitè dissito puncto S respondens, atque rectam D H bisecans) à puncto L modicè distet, quæ amabò visûs acies curvæ B α σ à recta B L deflectionem cernat; itaque frustrà esse videtur acutissimus vir, ad testem provocans hac in parte minûs competentem, déque cujus sententia vix ullatenus constare possit. Sanè quoad astinem in *Dioptricis* casum, quem attigimus supra, demisso in aquam perpendiculo, oculo simpliciter inspectanti, videbitur ejus imago nihil quicquam à perpendiculari declinans, verùm ope reflectionis justum perpendicularis situm observando (qui nudo scilicet obtutu planè dijudicari nequit) notoriè deprehenditur aquæ immersi perpendiculi imago ab ipso deviare. neque dubito quin pariter in præsente casu ritè consulta experientia pro nobis sit pronunciatura. Quinimò nostris ex effatis (luculentâ opinor ratione suffultis) apparebit, unde principium illud multis in casibus experientiæ videatur consentire; quoniam nempe contingit, ut in iis à vero non multùm abscedat; ejúsque proinde falsitatem sensus (nisi ratione, vel certiore sensu adjutus) perspicere nequeat. ast exorbito.

XV. Sit rursus *Speculum concavum* B M D; cujus centrum C, & per C extendatur infinita recta C B L, bisecetúrque semidiameter C B in Z; ac in Z B sumptis quibuscunque punctis A, R; fiat C A . A B :: C X . X B; itémque C R . R B :: C Y . Y B; erit quidem infinita B L totius B Z imago absoluta, & portio Y X portionis R A; verùm extra axem B C uspiam constituto visu, velut ad O, ad hunc relatæ ipsius Z B, ejúsque partium imagines ità determinantur. Fig. 187.

Fig. 187. XVI. Ad diametrum CO describatur circulus CFH, & ab O radius incidat talis, ut cum ejus reflexus sit DS, contingat fore DS $= \frac{1}{2}$ DH, vel $\frac{1}{2}$ DI; positâ CI ad DS perpendiculari (talis autem radius facilè duci posse concipiatur, & per curvam appropriatam revera statim determinetur; id proinde nos non distinebit). Erit tum puncti S imago, puta σ, a puncto D infinitè disjuncta, quoniam (id quod fieri nequit, nisi Hσ, σD sint infinitæ) est Hσ.σD :: IS. SD. Jam in arcum DB cadat utcunque radius OM, cujus reflexus sit MAE; & in hac sumatur ME = MF, tum in OM producta capiatur punctum α, ut sit Fα.αM :: EA. AM; erit α puncti A imago. simili methodo reperiatur ρ puncti R imago, neque non reliqua totius B$\rho\alpha\sigma$, ipsam BS referentis, puncta.

Fig. 187, 188. XVII. In hanc verò constructionem quædam veniunt adnotanda.

1. Quòd CS $\sqsubset$ CZ. Nam 4 CZq = CBq = 3 SDq + CSq. ergò quum sit CZ $\sqsubset$ SD; erit CS $\sqsubset$ CZ.

2. Quod CA $\sqsubset$ CS. Nam (è suprà monstratis) si ducatur recta Mψ ad DO parallela, ejusce reflexa (puta Mξ) secabit ipsam DS, versus I, puta ad ξ. ergò Mξ ipsam CB secabit supra punctum S, velut ad φ. atqui quoniam ang. CMO $\sqsubset$ CMψ, seu ang. CMA $\sqsubset$ CMφ, est CA $\sqsubset$ Cφ; adeóque magis est CA $\sqsubset$ CS.

3. Quòd EA $\sqsubset$ AM. cùm enim sit EM (vel FM) $\sqsubset$ HD, atque DS $\sqsubset$ MA; erit EM. MA $\sqsubset$ FD. DS :: 2. 1.

4. Hinc denuò liquebit totam lineam B$\rho\alpha\sigma$ ultra rectam CBL jacere. nam ducatur FQ ad AM parallela est hìc ang FCA $\sqsubset$ ang ACE. & ang FQA = ang CAE. quapropter erit CF. FQ $\sqsupset$ CE. AE. adeóque FQ $\sqsubset$ AE. ac indè FQ. AM $\sqsubset$ AE. AM; hoc est FK. KM $\sqsubset$ Fα.αM. dividendóque FM. KM $\sqsubset$ FM.αM. quare αM $\sqsubset$ KM. adeóque punctum α ultra K in recta OK protensâ jacet.

XVIII. Quòd si ad partes alteras rectæ OD ducatur radius ON' cujus reflexus NGT = NV; sitque TG. GN $\sqsupset$ 2. 1; statuenda est puncti G imago (puta γ) ad partes O. quinimò cùm in hanc rem plura subjici possent, ego jam *Specimina* tantùm instituens (quippe cùm operâ dignum haud arbitrer adeò tenuem materiam curiosiùs prosequi) à minutiis abstineo. quò & indè pronior sum, quoniam in hac re copiosus videtur *A. Tacquetus*; subinde quidem is, ob admissum istud falsum principium, cespitans, at bene multa credo

sugge-

suggerens haud aspernanda, relinquantur igitur ei cætera, mihi sufficerit, quæ veriorem *Phænomena* detegendi declarandique methodum adhuc sim aliquatenus enucleare, pergamus ad alios casus, haud ita perstrictatos.

XIX. Objiciatur speculo M B N D recta F A G, rectæ C A (per speculi centrum C transeunti) perpendicularis; adverto, si fuerit ipsa C A major quàm C Z, quadrans diametri B D, quòd rectæ F A G ad infinitum utrinque protractæ ad totum circulum (ejus ad partes intelligo concavas simul ac convexas) imago absoluta (quinetiam imago ad oculum in ipso centro C constitutum relata) erit *Ellipsis*. item si C A minor sit, quàm C Z, quòd ipsius F A G imago absoluta (vel dicto modo relata) constabit ex hyperbolis oppositis; si denuò C A ipsam C Z adæquet (vel F G per ipsum Z transeat) quòd ad parabolam ejusmodi consistet imago. Sed modum transgrederer hæc jam aggrediens demonstrare. Expectent igitur, ‖ Fig. 189.

Lect. XVII.

I. AD ea, quæ sub finitam præcedentem proposuimus demonstranda *necessariam*, *alioquin notabilem*, *Conicarum Sectionum proprietatem* imprimis ostendemus.

Sit triangulum A C E, rectum habens angulum ad C; & indefinitè protractis lateribus A C, A E, in A C sumatur quod piam punctum X, ducaturque X G ad C E parallela; inseratur autem angulo C X G recta C Z æqualis ipsi X G, tùm punctum indeterminatum Z ad sectionum conicarum aliquam consistere. Fig. 190.

II. Nempe primò, sit angulus A semirecto minor (vel A C E) erit punctum Z ad ellipsin, quæ determinatur hoc pacto; Anguli L C P semirecti fiant (ad utramque rectæ C E partem) liquet igitur rectas C P ipsi A E occurrere, puta ad puncta R, & S. ab his ad

ad ipsam EC parallelæ ducantur rectæ RT, SV; pilàm est indeterminatum punctum X inter limites T, V consistere (nam extra TV punctum quodlibet L accipiendo, & inde ducendo LIP ad CE parallelam, erit CL, hoc est LP, major quam LI, unde à C ad rectam LI, nulla duci recta potest æqualis ipsi LI). Jam autem dico, quòd punctum Z ad ellipsin cadit, cujus axis TV, focus C. Nam bisecetur TV in K, fiat VD = TC, ducatur KH ad CE parallela; per H ducatur HN ad CK parallela. Estque $KH = \frac{TR+VS}{2} = \frac{CT+CV}{2} = KT = KV$. Et quoniam AV. AT :: (VS. TR (hoc est) :: CV. CT ::) CV. DV; erit per rationis conversionem AV. TV :: CV. CD. vel, consequentes subduplando, AV. KV :: CV. CK, dividendoque AK. KV :: KV. CK; hoc est AK. KH :: KH. CK, hoc est HN. NG :: KH. CK, quare $KH \times NG = CK \times HN = CK \times KX$. atqui est $CZq = XGq = KHq + NGq + 2\,KH \times NG$. & $CXq = CKq + KXq + 2\,CK \times KX = CKq + KXq + 2\,KH \times NG$. ergò $KHq + NGq - CKq - KXq = CZq - CXq = XZq$. Ad alteras bisegmenti R partes sumatur $K\xi = KX$, ducaturque $\xi\nu$ ad KH parallela, secans curvam TEZV in ζ, & rectam AH in γ, ac ipsam NH in ν; erit quoque, simili ex discursu, $\xi\zeta q = KHq + \nu\gamma q - CKq - K\xi q$; unde liquet fore $\xi\zeta = XZ$, connexisque proinde rectis Cζ, Dζ, erit $D\zeta = CZ$, & $C\zeta + CZ = \xi\gamma + XG = 2\,KH = TV$. ergò $C\zeta + D\zeta$ (vel $DZ + CZ$) $= TV$. unde perspicitur *curvam* TζZV *esse ellipsin*, cujus *axis* TV; *foci* C, D.

Fig. 191. III. Sit autem secundò angulus CAE major semirecto (vel AC ⫬ CE) dico punctum Z ad oppositas hyperbolas, consimili modo determinabiles, existere. enimverò factis (ad utramque rectæ CA partem) angulis semirectis ACP, & (ab ipsarum CP cum AE occursibus) ductis rectis RT, SV ad CE parallelis, punctum X extra limites TV necessariò consistet (etenim ubivis intra TV ductâ LIP ad CE parallelâ, erit LI ⫬ LP, ideòque nulla par ipsi LI angulo ALI subtendi potest, id quod extra terminos hosce nil prohibet fieri). erit jam TV axis, & C focus hyperbolarum. Fiant enim omnia, quæ in casu præcedente, eritque rursus hic $KH = KV$. item ob AV. AT :: CV. DV, & (inversè componendo)

AV.

AV. TV :: CV. CD, & consequentes subduplando, dividendoque AK. KV :: KV. KD :: XV. CK. vel AK. KH :: KH. CK, hoc est HN (KX). NG :: KH. CK; quare CK × KX = KH × NG, est autem XZq = CZq — CXq = XGq — CXq = NGq + KHq — 2NG × KH: — KXq — CKq + 2CK × KX = NGq + KHq — KXq — CKq. Sumatur Kζ = KX, discursumque similem adhibendo liquebit fore ξζ = XZ, & ideo Dζ = CZ. unde Cζ — Dζ (DZ — CZ) = Cζ — CZ = ξγ — XG = 2KH = TV. quare manifestum est curvam TZ, vζ esse *Hyperbolam*, quarum axis Tv, foci C, D.

IV. Tertiò demùm, sit angulus CAE semirectus (vel CA = CE) erit tum punctum Z ad parabolam, quæ itidem ita determinatur. Fiat angulus ACP semirectus, & ab ipsarum AE, CP intersectione R ducatur RT ad CE parallela, erit T *Vertex*, utque C *Focus Parabolæ*. id quod ex bene nota sectionis hujus proprietate constat, qua scilicet est TA = TR = TC (ob angulos TAR, TCR semirectos) & AX = XG = CZ. Fig. 192.

V. Manifestum est verò rectam AE sectionem has ad E contingere. quia nempe perpetuò major est CZ (vel XG) ordinatâ XZ, adeóque puncta G extra curvas utraquæque jacent hoc est tota AG extra illas cadit.

VI. Hisce præstratis: *Esto Circulare speculum* MBND, centrum habens C; cui exponatur recta quæpiam FaG; & huic perpendicularis sit recta Ca; quam ad partes aversus sumpta CA, adæquet. Sit etiam CE ad CA perpendicularis, ac æqualis quadranti diametri BD; connexáque recta AE producatur utcunque. sumpto jam in recta FaG puncto quolibet F, connectatur FC, & radiationis ab F in ipsa FC limes, seu *focus*, sit Z; ac per Z ducatur ZX ad AC perpendicularis, ipsi AE occurrens in H; dico fore XH parem ipsi CZ. Fig. 193.

Nam (è jam antè monstratis) est FC. CZ :: FM. MZ (hoc est) :: FC — CB. CB — CZ. hinc erit aC. CX (AC. CX) :: FC — CB. CB — CZ. quare (ducendo in se extrema, ac media) erit AC × CB — AC × CZ = CX × FC — CX × CB. hoc est (ipsi CX × FC substituendo AC × CZ, propter aC. CX :: FC. CZ) erit AC × CB — AC × CZ = AC × CZ — CX × CB. transponendóque AC × CB + CX × CB = 2AC × CZ.

hoc

hoc est $AX \times CB = \frac{1}{2}AC \times CZ$, vel $\frac{1}{2}AX \times CE = \frac{1}{2}AC \times CZ$; unde $AX, AC :: CZ, CE$, hoc est $XH, CE :: CZ, CE$. quapropter est $XH = CZ$: Quod E. D.

Quoad radiationem ad partes concavas, planè similis est discursus. examinetis ipsi, peto.

Fig. 193, 194, 195. VII. Exhinc evidenter liquet, si fuerit $CA \sqsubset CE$, quòd omnes punctorum F limites, seu foci (quales Z) ad ellipsin existunt; cujus *focus* C, & cujus *axis* TV è præmissis, non uno modo, determinatur. item si $CA = CE$, limites Z ad parabolam consistent cujus *focus* C, *axis* $CT = \frac{1}{2}CE$, *vertex* T. denuò, si $CA \sqsupset CB$, puncta Z ad *hyperbolas esse constat*, quarum itidem *focus* C, & *axis* TV facilè de modò (vel alibi) dictis reperitur; cunctarum verò sectionum *Parameter* ipsi CB æquatur.

VIII. Hinc in singulis respectivè casibus, ejusmodi *sectionis conicæ* sunt rectarum FaG absolutæ imagines; quin & eædem veræ sunt imagines ad oculum relatæ in speculi centro constituendum; ex reflectione scilicet ad concavas speculi partes effectæ; quæ solæ oculo sic posito conspicuæ sunt.

IX. Patet autem si recta FaG infinitè distet, quòd *ellipsis* in *circulum* abit. utì quoque si FaG per centrum transeat, quod *hyperbolæ* istæ in rectam lineam degenerant.

X. Subnotetur etiam in casu quum *imago sit hyperbolica*, quod *hyperbola* YTY pars YEEY, neque non tota ζVζ ad circuli partes MBN pertinent; (nempe si centro C per E descriptus circulus ipsam FG intersecet punctis K, tota hyperbola ζVζ rectam interceptam KK referet; & hyperbolicæ lineæ alterius pars superior YEEY quod reliquum est repræsentabit hinc indè protensæ rectæ FG) pars autem FTE ad partem concavam MDN spectat. id quod sufficerit admonitum.

Fig. 196. XI. Et hæc quidem de rectæ FAG imaginibus absolutis; è quibus commodius de relatis judicum fiet. sit, instantiæ loco, oculus O, ad quem (convexis è partibus) ab F, & G reflectantur OMK, ONL; & sit ellipsis ZVYT absoluta (qualem modò definivimus) rectæ FAG imago; quam ductæ FC, GC punctis Z, Y secent. itaque punctorum F, G imagines ad O relatæ (puta ρ, & σ) extra

ellipsin

fig: 182.
fig: 183
fig: 184
fig: 185
fig: 186
fig: 187
fig: 188
fig: 189
fig: 190
fig: 191
fig: 192
fig: 194

Fig. 193
194, 195

Fig. 196.

ellipsin jacent. Nam punctum K inter F & Z, ac punctum φ inter O, & K; nec non punctum L inter G, & Y, atque punctum γ inter O, & L cadunt. imaginis itaque φ γ figura ad ellipticam accedit, eâ tamen aliquanto planior & compressior. non dissimili ratione quoad imagines ad concava factas, & quoad cæteros casus instituetur judicium. tædii plenum esset omnia singillatim percensere. quinetiam à præmissis luculenté constat quo pacto linea φ γ præcisè describatur, punctatim utique. circa refractiones paria veniunt præstanda, postquam tamen paullùm respiravero; nunc enim verbo quidem pauca, rei qualitatem, studiúmque demonstrandis istis impensum respectando, satis forsasse multa videor tradidisse. ||

LECT. XVIII.

1. *Propositum est jam nobis recta linea ex refractione progenitas ad circulum imagines designare*; nempe primùm absolutas; quorsum hoc spectat *Theorema*:

In circulum (e. g. medii densioris) refractivum M B N D radiet recta E A G, huic verò perpendicularis sit recta C A (circuli centrum C permeans) tum in rectâ F G sumpto liberè puncto F ducatur recta F C, & in hac sit punctum Z limes (qualem antèa fiximus) radiationis à puncto F, sit autem Z X ad A C normalis. porrò fiat C A. C R :: I. R, & A R. C B :: C R. C E (ponatur autem C E ad X Z parallela) tum connexa R E cum ipsa X Z conveniat in H. dico fore X H = C Z. Fig. 197.

Nam (è præmonstratis) est F C × M Z. F M × C Z :: I. R :: C A. C R. hoc est F C × C M + F C × C Z. F C × C Z — C M × C Z :: C A. C R. quare (ducendo in se extrema, mediaque) est F C × C M × C R + F C × C Z × C R = F C × C Z × C A — C M × C Z × C A = F C × C Z × C A — C M × F C × C X (quoniam scilicet est

CZ . FC :: CX . CA, adeóque CZ × CA = FC × CX). quapropter (elidendo FC) est CM × CR + CZ × CR = CZ × CA — CM × CX, transponendóque CM × CR + CM × CX = CZ × CA — CZ × CR. hoc est CM × RX = CZ × AR. quare (ad analogismum redigendo) est AR . CM :: RX . CZ. hoc est CR . CE :: RX . CZ. hoc est RX . XH :: RX . CZ, unde XH = CZ: Quod E. D.

II. Exhinc (& ex iis quæ circa *sectiones conicas* nuperrimè sunt ostensa) liquidò consectatur, si CR major fuerit quàm CE (vel quod eódem recidit, AR major quàm CB) quòd punctorum omnium F in recta FAG imagines absolutæ (quales Z) ad *ellipsin* consistent, cujus *Focus* C, cujúsque penitus determinandæ modum satis facilem tunc ostendimus. item si CR = CE, quòd imagines istæ ad parabolam erunt; & denique, si CR ⊐ CE, quòd eædem in hyperbolis oppositis reperientur; quarum etiam sectionum focus communis est punctum C, & quarum axes designandi modum reliquáque circa ipsas præsertim advertenda declaravimus. (Nempe, si rectæ CP cum ipsa CA semirectos constituant angulos; & hæ rectam RE intersecent ad puncta S, indéque demittantur ad AC perpendiculares ST, SV, erunt T, V axis termini, rectáque CE semi-parameter erit) unde patet totius rectæ FAG ad infinitum protensæ absolutam imaginem (quin & illam, quæ ad oculum in centro C positum refertur) aliquam esse dictarum conicarum, pro suo peculiari situ hanc vel illam respectivè.

Fig. 198. III. Adnotari porrò debet in isto casu, *sectionis elliptica* (quinetiam & *parabolica*) TEZ partem anticam TE ad concavas circuli partes LDL spectare, sicuti postica EY ad convexas MBN pertinet. in hoc autem altero tota *hyperbola* ZVZ, nec non *hyperbola* ETE pars (infra ECE) YEEY ad partem circuli convexam referri debent (nempe si centro C, intervallo CE descriptus circulus rectam FG secet punctis K, K; hyperbola ZVZ rectam interceptam KK repræsentabit, ipsiúsque FG quod reliquum est hinc indè protensum pars YEEY referet) pars autem superior ETE ad cavam circuli partem LDL spectat.|| Semper autem (cùm hic, tum ubique) intelligatur ad utrasque propositi circuli partes ejusdem generis refractionem effici, seu ejusdem speciei medio radios incidere.

IV. Ex his obiter naturæ, quam in oculi figura construenda adhibuit,

huic, ſolemnia quædamnon diſcrepare videantur, ſeu ratio quædam ſubſignari poſſit, quæ occulti fundum Sphæroidum (nunc ab hoc nunc ab illo latere) oculis ſe ſubjiciens, ſolis radiorum illis planorum objectum ſenſibus ſubtrahat (quibus in diſcutiendis opticorum penitiorum verſatur uſus) exemplis ſatis declarabitur. Sed hoc *in poſterum*.

V. In reliquis refractionum caſibus paria fermè contingunt, quos ideo facilius prætervolare poſſem, ut minuendo veſtro labori, ſeu quò clarius & promptius de iis conſtet, non gravabor & illos vobis ob oculos ponere: nempe

Rarioris medii circulo M B N objiciatur recta F A G, cui normalis C A, ſitque punctum Z puncti cujuſvis F, in F G ſumpti, imago abſoluta, & Z X ad C A perpendicularis, ac C A. C R :: I. R; & R A. C B :: R C. C E, & ipſi R E connexæ occurrat X Z protracta ad H, eritque rurſus X H = C Z. Fig. 199.

Nam eſt C A. C R :: (F C × M Z. F M × C Z ::) F C × C Z — F C × C M. F C × C Z — C M × C Z. quare C R × F C × C Z — C R × F C × C M = C A × F C × C Z — C A × C M × C Z = C A × F C × C Z — F C × C M × C X. ac indè C R × C Z — C R × C M = C A × C Z — C M × C X. tranſponendóque C R × C Z — C A × C Z = C R × C M — C X × C M, hoc eſt R X. C Z :: A R. C M :: R C. C B :: R X. X H. quapropter eſt C Z = X H.

VI. Hinc dilucidè rurſus apparet rectæ F A G imaginem abſolutam (vel ad oculum in centro C ſitum relatam) ſi R C ⊏ C E, *ellipticam* fore, ſin R C = C E, fore *parabolicam* (quarum ſectionum pars anterior E T E ad convexam circuli refringentis partem M B N pertinet, poſterior Y E E Y ad cavam L D L). Quòd ſi fuerit R C ⊐ R E, ejus *imago hyperbolica erit*; & quidem *hyperbolæ* Y T Y pars ſuperior E T E ad circuli partem N B N referenda eſt; pars autem inferior Y E E Y unà cum tota hyperbola ζ V ζ ad partes concavas L D L pertinebit. nempe ſi fuerint rectæ C K æquales ipſi C E, tota hyperbola ζ V ζ interceptam punctis K rectæ F G portionem referet, ejuſque quod hinc indè protenſum ſupereſt ab ipſa Y E E Y repræſentabitur. Fig. 200.

VII. Porrò, quoad omnes hoſce caſus animadvertere licet poſſe ſectionem eandem conicam innumeris rectis lineis ad diverſos circulos

centronicos expositis reprasentandis inserviat. Nimirum in casu posteriore, si reliquis fucis punctis A, [illegible] nihilominus hyperbolæ (ut, v. g., Y T Y) reflexa F A G repræsentabunt ad circulos, quorum semidiametri C B ipsis A I singulis respectivè singulis æquantur, modò semper intelligatur esse C A, C R :: I. R. id quod satis fuerit obiter admoniisse.

VIII. Ut de illud cursim innuisse sufficerit, quòd sicut à conicis sectionibus rectæ lineæ, ità vicissim *conicæ sectiones* à rectis lineis ex justa congruæ ad circulos inflectione repræsentantur, quos usque non arduum videtur è præmissis deducere.

IX. Ut & exindè *datâ conicâ sectione* circulus & recta facilè designantur, ità ut conica sectam illam repræsentet ex inflectione ad istum circulum. Nempe si à foco C ad axem C V applicetur normalis C E, & recta E R sectionem tangat ad E, factoque C R. C A :: R. I, ducatur per A recta A I ad C E parallela, sitque C B = A I, tum centro C per B ducatur circulus M B N, peractum erit negotium.

X. Ex his tandem de imaginibus ad oculum ubicunque collocatum relatis, quales illæ figuras ac situs obtinent, proclivius erit judicare. scilicet ex saltem unum (in recta per oculi, circulique refringentis centrum trajecta positum) commune cum absolutis punctum habent; quoad reliqua verò respectiva puncta nonnihil ab his deflectunt ad eas partes, quas oculi situs peculiaris, & radiorum cursus exigunt; id quod facilius sit in singulis casibus qualiter eveniat perspicere, quam verbis universim explicare. sed enim unam rei declarandæ subjiciemus instantiam. Ad oculum O refringantur ab F, & G radii F M O, G N O; sit autem *ellipsis* T Z V Y rectæ F G absoluta imago, quam connexæ F C, G C punctis Z, Y secent (ità quidem ut Z sit puncti F, & Y puncti G imago absoluta) enimverò, de supradictis colligitur punctum K supra Z versus C existere; quinetiam puncti F in recta M O imaginem (puta φ) ultra F Z jacere. Similiter puncti G imago (γ) supra Y, ultràque G Y sita est. unde conjectura fiet de totius imaginis φ ∝ γ positione, seu figura ad *ellipticam* accedente, qualis in appositâ exhibetur figura; quæ certè (quanquam haud absque nimiâ molestiâ) juxta theoriam suprà constabilitam accuratè poterit delineari. Fig. 201.

XI. Ità

XI. Ità rectarum linearum ad sphæricam superficiem ex inflectione quavis promotam imagines qualitercunque liceat definire. unde de planarum quoque superficierum ad eandem repræsentationibus haud difficilè statuetur; harum scilicet imagines absolutæ *conoidum aut Sphæroidum Superficies orum* è rectarum imaginibus respectivis circa radiationum axes conversis progenitæ; quin & relatæ quoque planarum superficierum imagines è rectarum imaginibus relatis simili pacto progenerantur. rem totam ipsi mentem aliquantillum advertentes perspicietis; me *κοπτολογίας* extremæ fastidium capit.

XII. Restare videtur, ut quomodò compositæ superficies sphæricæ objectas repræsentant lineas dispiciamus. verùm cùm imagines indè prognatæ sint altioris gradûs lineæ, ab usu notitiâque communi segregatæ, atque proprietatibus intricatis præditæ; nil aliud quàm operam luderem iis desudans extricandis. illas itaque transiliam; hoc commonens unicum, punctorum in illis aliquot principalium positiones è præmonstratis dignosci, de cæteris commodiùs ex conjectura dijudicari.

XIII. Hæc sunt, quæ circa partem *Optica* præcipuè *Mathematicam* dicenda mihi suggessit meditatio. circa reliquas (quæ *φυσικώτεραι* sunt, adeóqve sæpiusculè pro certis principiis plausibiles conjecturas venditare necessum habent) nihil ferè quicquam admodum verisimile succurrit, à pervulgatis (ab iis, inquam, quæ *Keplerus*, *Scheinerus*, *Cartesius*, & post illos alii tradiderunt) alienum aut diversum. atqui tacere malo, quàm toties oblatam eramben reponere. proinde receptui cano; nec ità tamen ut prorsus discedam, anteaquàm improbam quandam difficultatem (pro sinceritate quam & vobis & veritati debeo minimè dissimulandam) in medium protulero, quæ doctrinæ nostræ, hactenus inculcatæ, se objicit adversam, ab ea saltem nullam admittit solutionem. illa, breviter, talis est: *Lenti vel speculo cavo* E B F exponatur visibile punctum A, ità distans, ut radii ab A manantes ex inflectione versus axem A B cogantur; sitque radiationis limes (seu puncti A imago, qualem supra passim statuimus) punctum Z; inter hoc autem & inflectentis verticem B uspiam positus concipiatur oculus. quæri jam potest, ubi loci debeat punctum A apparere. retrorsum ad punctum Z videri natura non fert (cùm omnis impressio sensum afficiens proveniat à partibus A) ac experientia reclamat. nostris autem è placitis consequi videtur ipsum, ad partes anticas

Fig. 202, 203.

ticas apparens, ab intervallo longissimè dissito, (quod & maximum sensibile quodvis intervallum quodammodo exsuperet) apparere. cùm enim quò radiis minùs divergentibus attingitur objectum, eò (seclusis utique prænotionibus, & præjudiciis) longiùs abesse sentiatur; & quod parallelos ad oculum radios projicit, remotissimè positum æstimetur, exigere ratio videtur, ut quod convergentibus radiis apprehenditur, adhuc magis, si fieri posset, quoad apparentiam elongetur. quin & circa casum hunc generatim inquiri possit, quidnam omninò sit, quod apparentem puncti A locum determinet, faciatque quod constanti ratione nunc propius, nunc remotius appareat, cui itidem dubio nihil quicquam ex hactenus dictorum *Analogia* responderi posse videtur, nisi debere punctum A perpetuò longissimè semotum videri. Verùm experientia secùs attestatur, illud pro diversâ oculi inter puncta B, Z positione variè distans; nunquam ferè (si unquam) longinquius ipso A liberè spectato, subindè verò multo propinquius adparere; quinimò, quò oculum appellentes radii magis convergunt eò speciem objecti propiùs accedere. nempe, si puncto B admoveatur *oculus*, suo (ad lentem) ferè nativo in loco conspicitur punctum A (vel æquè distans, ad *speculum*;) ad O reductus oculus ejusce speciem appropinquantem cernit; ad P adhuc vicinius ipsum existimat; ac ità sensim, donec alicubi tandem, velut ad Q, constituto oculo objectum summè propinquum apparens in meram confusionem incipiat evanescere. quæ sanè cuncta rationibus atque decretis nostris repugnare videntur, aut cùm iis saltem parùm amicè conspirant. Neque nostram tantùm sententiam pulsat hoc experimentum; at ex æquo cæteras quas nôcim omnes, veterem imprimis ac vulgatam, nostræ præ reliquis affinem ità convellere videtur, ut ejus vi coactus doctissimus *A. Tacquetus* isti principio (cui penè soli totam inædificaverat *Catoptricam* suam) ceu infido ac inconstanti renunciârit, adeoque suam ipse doctrinam labefactârit; id tamen, opinor, minimè facturus, si rem totam inspexisset penitiùs, atque difficultatis fundum attigisset. Apud me verò non ità pollet hæc, nec eoúsque præpollebit ulla difficultas, ut ab iis quæ manifestè rationi consentanea video, discedam; præsertim quum ut hîc accidit, ejusmodi difficultas in singularis cujus piam casûs disparitate fundetur. nimirum in præsente casu peculiare quiddam, naturæ subtilitati involutum, delitescit, ægrè fortassis, nisi perfectiùs explorato videndi modo, detegendum. circa quod nil, fateor, hactenus excogitare potui, quod adblandiretur animo meo, nedum planè satisfaceret. Vobis itaque nodum hunc, utinam feliciore conatu, resolvendum committo. Ità demum, *Auditores Optimi, Valeatis.*

FINIS.

TRINITY COLLEGE LIBRARY CAMBRIDGE

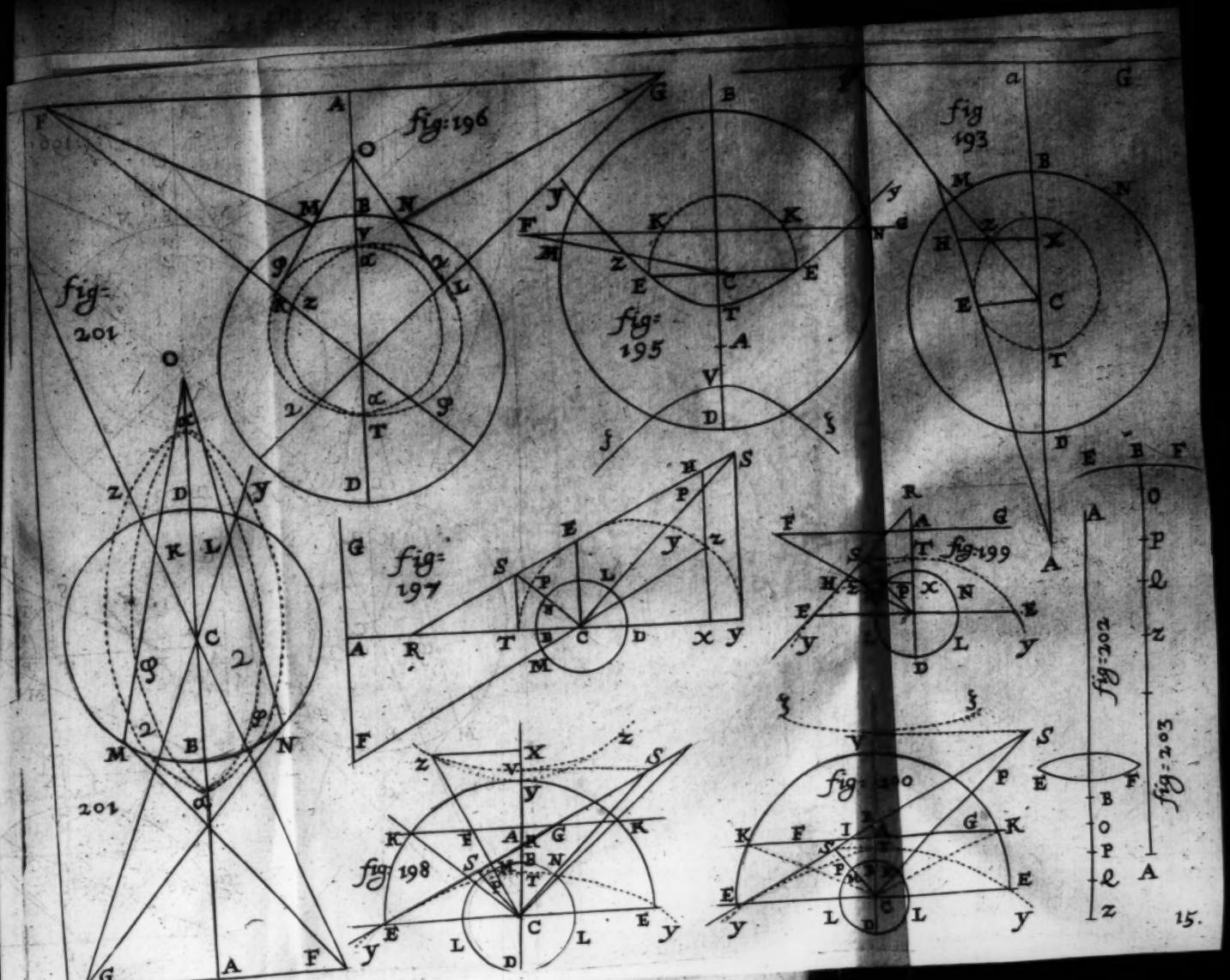
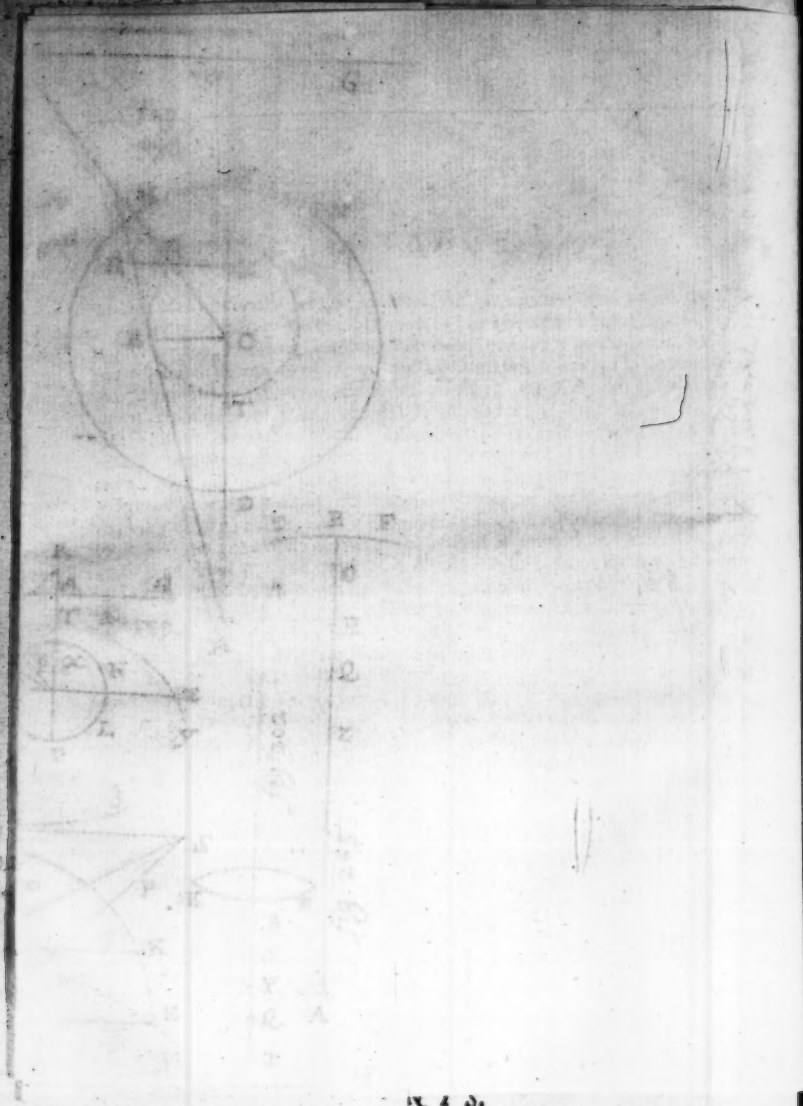


fig: 196
fig: 201
fig: 195
fig 193
fig: 197
fig: 199
fig: 198
fig: 200
fig: 202
fig: 203
201
15.



TRINITY COLLEGE LIBRARY CAMBRIDGE

ERRATA.

Pag. 3. lin. 25 luce. (præſente, leg. luce (præſente p 9, l 21, deſceptatur / diſceptatur ib. l 31, valeat id / valeat id p 5, l 31, toto / tota, p 6, l 23, dici / dicitur, p 11, l 10, allas / alias, p 13, l 27, proximo / proximos, p 14, l 12, contrandicum / contraniſum, p 14, l 16, effectant / affectant, p 15, l 14, nobile / mobile, p 16, l 20, in quæ / in iis quæ, p 17, l 3, ſubſtracto / ſubſtrato, p 17, l 5, citentur fig 10, p 17, l 20, fig 12 / fig 11, p 18, l 11, fig 13 / fig 12, p 19, l 17, tranſimitti / tranſmittit, p 22, l 21 [illegible] / [illegible], p 23, l 6, incidentes (radios / incidentes radios, p 23, l 19, S B protracta / S B (protracta, p 28, ambages. I. Demonſtratæ proſtant / ambages demonſtratæ proſtant. I. Ut in Parabola, p 29, l 25, citentur fig 29, p 29, l 30, puncto divergentium tanquam / puncto divergentium radiorum reflexi rurſus divergunt tanquam, p 29, l 32, ſuo / ſeu, p 32, l 10, fig 34, 35 deleatur, & citentur ad lineam 31, p 33, l 4, citentur fig 36, ibid. l 6, cientur fig 37 & 38, p 38, l 28, I q. R. A B. I / I q. R. & A B. T p 40, l 17, Sc / Si, ib. l 33, quoquam / quaquam, p 41, l 24, abeoque / adeoque, p 45, l 7, reciſſimi / rectiſſimi, ib. l 8, propriores / propiores, p 47, l 24, reſignare / deſignare, p 48, l 1, Z 2, l 2. ib. l 12, Nocetur ſi fuerit H N P / Notetu ſi fuerit H N ω, p 57, l 4, ejuſce / cujuſce, p 65, l 4, exiſtimari / exiſtimare, ib. l 22, ipſe / eſſe, p 67, l 13, interjaceret / interjacet, p 70, l 3, poſteribus / poſterioribus p 71, l 32, Adverſatur / Advertatur, p 71, l 15, γ S γ v / γ S. γ v. p 78, l 1, in eodem / eodem, p 89, l 25. rariori / rariori, p 90, l 17, expanſem / expenſam, p 95, l 14, reflectionibus / reflectionibus, ib. l 40, Sinus / Simus, p 96, l 3. ſimplicime / ſimpliciſſime, p 97, l 8, quæſitam / quæſitum, p 105, l 28, Poſito / Poſitio, p 112, l 26, admodum / ad modum.

ERRATA.

LECTIONES Geometricæ:

In quibus (præsertim)

GENERALIA *Curvarum Linearum* SYMPTOMATA

DECLARANTUR.

Auctore ISAACO BARROW, Collegii S. S. *Trinitatis* in Acad. *Cantab.* Socio, & *Societatis Regiæ* Sodale.

Οἱ φύσει λογιστικοὶ πρὸς πάσῃ τῇ μαθήσει, ὡς ἔπος εἰπεῖν, ἐξεῖς φαίνονται· εἰ δὲ βραδεῖς, ἂν ἐν τούτῳ παιδευθῶσι καὶ γυμνάσωνται, κἂν μηδὲν ἄλλο ὠφεληθῶσιν, ὅμως εἴσεται τὸ ὀξύτερον αὐτοὶ αὑτῶν γίγνεσθαι πολὺ βελτίους. Plato de Repub. VII.

LONDINI,

Typis *Gulielmi Godbid*, & prostant venales apud *Gualterum Kettilby*, ad Insigne *Capitis Episcopi* in Cœmeterio D. *Pauli*. M. DC. LXXII.

TRINITY COLLEGE
LIBRARY
CAMBRIDGE
C

BENEVOLO LECTORI.

Lectionibus his (quas jam quodammodò postbumas accipis) septem, unâ sepositâ, postremas Opticis *illis, quæ nuper editæ prostant, Comitis & quasi Mantissas destinâram; aliàs, opinor, de proferendis in apricum ejusmodi quisquiliis nihil cogitaturus. Sed cum nihilominùs è re sua fore censeret* Librarius *ab istis divulsas has seorsum comparere; quin & ad comparandum huic Opellæ speciem aliquam (ut ea nempe* rejectanei Schediasmatis *molem transcenderet) aliud quidpiam suppeditari cuperet; ejus (haud gravatìm non dixero) votis obsecundans, adjeci Lectiones priores quinque; subsequentibus illis materiâ agnatas, & quasi cohærentes; quas scilicet ante aliquot annos*

ut

ut nullo animo evulgandi, ità procul ab ea cura conceperam, quæ talem animum deceret; Enimverò crassiùs & ἐπιπολαίτερον scriptæ sunt, neque firmè quicquam continent, extra Tyronum, *quibus accommodatæ sunt, usum, captumve jacens. quapropter harum rerum peritos obtestor, ut ab iis prorsus abstineant oculos, vel ut veniam saltem paullò liberaliùs indulgeant. alteras quas dixi septem conspectui tuo lubentiùs expono, nonnulla sperans in illis haberi, quæ nec eruditiores piguerit inspicere. Ultimam* amicus (*vir sanè cum primis probus, ast in hujusmodi negotiis* Flagitator improbus) *extorsit, aut certè, pro jure quod meritò obtinet suo, exegit. Cæterùm quid tractent, & quorsum tendant, facilè singularum initia delibans edoceberis; ut non sit cur te longiùs morer aut detineam.* Vale.

Lectio I.

NOvum jam ingrediôr dicendi campum, amœniorem fanè nescio vel feraciorem, uberrimâ varietate confertum, eóque delectabilem, & quia primas fermè *Mathematicarum hypotheſium origines* recludit (è quibus nempe *magnitudinum cùm definitiones efformantur; tum proprietates emergunt*) necessario perquam utilem. De magnitudinum intelligo generatione, seu de modis, quibus ortæ productæve concipiantur variæ magnitudinum species. Nec ulla certè magnitudo datur, quæ non innumeris modis & intelligi producta possit, & reverà produci. Possunt autem, qui saltem hactenus usurpati sunt, ad præcipua quædam genera referri, quorum se mihi jam cogitanti suggerentia sunt hæc; *per motus locales; per interſectiones magnitudinum; per quantitate poſitionéque determinatas ab aſſignatis locis diſtantias; per ductus magnitudinum in magnitudines; & per applicationes magnitudinum ad magnitudines; per aggregationem magnitudinum ordine certo diſpoſitarum; per appoſitionem magnitudinum ad alias, vel ſubductionem ab aliis; per organicam demum* (ab horum quocunque deductam, aut ordinatam) *effectionem.* Horum, & si qui sunt aliorum modus primarius, & quem alii cuncti quodammodo supponant oportet, utpote sine quo nil procreari potest, est iste, *qui per motum localem.* De quo proinde primo disputiendum. De motu celebratur illud *Aristotelis* effatum, ἀναγκαῖον ἀγνοουμένης ἀνῆς (κινήσεως) ἀγνοεῖσθαι καὶ τὴν φύσιν: ignorato motu necessariò naturam ignorari, in Physicis ideò paginam utramque facit; nec immeritò, cùm in natura (saltem quantum humanus intellectus assequi valet, aut experientia commonstrare) quicquid fiat, à motu fiat, aut certè non absque motu. De natura motûs igitur, & rectâ definitione, de causis, de differentiis complura subtiliter argutantur Physici, quorum ferè *Mathematicis nihil cordi*

3. Phyſ. 1.

vel cura. Sufficere poteſt his quæ communis ſenſus agnoſcit, & obvia comprobant experimenta pro conceſſis arripere, hoc imprimis generale, Quamvis magnitudinem (magnitudinibus etiam punctum accenſebo ceu minimum magnum, ut & infinitum ceu maximum magnum, quibus mediæ interjacent magnitudines omnes finitæ) mobilem eſſe, hoc eſt eo quo conſpicimus indies fieri modo locum ſuum & ſitum poſſe demutare, juxta differentias præſtitutas, motu nempe vel directo, vel circulari, æquabiliter velocè, vel utcunque magis accelerato, vel magis retardato. Hujuſmodi dico motuum quemvis prò lubitu ſuo tanquam evidenter poſſibilem aſſumunt, ut quid exinde conſequatur inveſtigent & oſtendant. De iis igitur differentiis motuum quotæ ſint & quales diſſeremus. In motu potiſſimùm à *Mathematicis* conſideramur *ipſe modus lationis*, & *quantitas vis motivæ*. Ipſe modus primò lationis, juxta quem motus, alii progreſſivi ſunt, alii circumlatorii, alii compoſiti ex his; tum vis motivæ quantitas, propter quam alter alterius reſpectu velocior, tardior, æquè velox, aut in ſe æquabilis, acceleratus, retardatus affirmatur. Ex his manant fontibus differentiæ motuum, quorum de poſteriore nos primùm agemus, quia nonnulla continet *ἀφορισμὸς* quæ velim quam primùm ablegata, quo reliqua poſtmodum expeditius fluant & limpidius. & quia vis motivæ quantitas ſine tempore dignoſci nequit, de temporis natura perſtringendum eſt aliquid. Tempus autem dic ſodes, quid eſt? illud *Auguſtini* tritiſſimum noſtis; ſi nemo quærat ſcio, ſi quis interroget neſcio. Verum quia *Mathematici* crebrò tempus adhibent, quid eo deſignetur vocabulo diſtinctè concipiant oportet, agyrtæ ſecus futuri quare jure reſponſum exigatis; ac ſtatim pareo, ſed breviter ac ſimpliciter, & quantum potero *κατὰ τὸ ὑφαῖνον* delugiens. Abſtractè loquendo, tempus eſt perſeverantia rei cujuſque in ſuo eſſe. Alias verò res aliis diutiùs in eſſe ſuo permanere, fuiſſe eum hæ non erant, eſſe eum hæ non ſunt, prius incepiſſe, ſeriùs deſinere, neque non aliquas cum aliis una oriri ac occidere, ſimulque, quaſi durationis progreſſu, à carceribus ad metas, univerſum ætatis curriculum emetiri, nemini non perſpectum eſt. Ergo tempus abſolutè quantum eſt, ut quantitatis admittens (modo ſuo) præcipuas affectiones æqualitatem, inæqualitatem, proportionem; nec enim diffiteatur quiſquam, opinor, *ἰσόχρονα* fore, quæ ſimul exoriuntur & ſimul intereunt; inæqualiter durâſſe, quorum unum fuit antequam alterum cæperit eſſe, nec non eſſe, perſeverat, poſtquam alterum deſierit exiſtere. Longius autem, & brevius tempus nemo non dicere ſoler, nemo non concipere videtur. Quantitatis igitur particeps eſſe tempus communis ſenſus agnoſcit,

pro

pro modo permanentiæ rerum in ſuo eſſe. At enim dices: ante res omnes conditas annon tempus fuit? extra mundum, ubi nihil manet, annon tempus labitur? reſpondeo, ſicut ante conditum mundum fuit ſpatium, & extra mundum nunc eſt & quidem infinitum cui Deus coexiſtit) quatenus potuerunt olim, & poſſunt jam exiſtere talia tantaque corpora, quæ tum non fuerunt, aut jam non ſunt; ita prius mundo, & ſimul cum mundo (licèt extra mundum) tempus fuit, & eſt, quatenus ante mundum exortum potuerunt aliquæ res in eſſe tamdiu permanere, poſſint jam extra mundum talis permanentiæ capaces res exiſtere, potuit *Sol* multo prius in lucem emerſiſſe; poſſit jam ille, vel alius talis ſpatiis imaginariis affulgere. Tempus igitur non actualem exiſtentiam, at capacitatem tantum ſeu poſſibilitatem denotat permanentis exiſtentiæ, ſicut ſpacium capacitatem deſignat magnitudinis intercèdentis. Sed mirum, ingeres, ſecluſo motu tempus explicari, annon tempus motum implicat? Minimè dico quoad abſolutam, & intrinſecam naturam ſuam, haud magis quam quietem; à neutro temporis quantitas in ſe dependet, ſeu currant res, ſeu ſtent; ſeu dormiamus nos, ſive vigilemus æquo tenore tempus labitur. Finge ſtellas omnes ab incunabulis ſuis fixas perſtitiſſe; nihil indè quicquam tempori deceſſiſſet, tamdiu quies iſta perdurâſſet, quamdiu motus hic effluxit. Prius, poſterius, ſimul (quoad ortus rerum & interitus) etiam in illo tranquillo ſtatu fuiſſet in ſe, potuiſſet à mente magis perfecta apprehendi. Sed prout ipſæ magnitudines ſunt abſolutè quantæ, independenter ab omni menſuræ reſpectu, etſi nos ipſarum quantitates niſi menſuras applicando percipere nequeamus; ità per ſe tempus quantum eſt, etſi quo temporis quantitas a nobis dignoſcatur, advocandum ſit motûs ſubſidium, ceu menſuræ quâ temporum quantitates æſtimemus, & inter ſe conferamus; adeóque tempus ut menſurabile motum connotat, nec enim, ſi res omnes immotæ perſtarent, ullo pacto quantum effluxiſſet temporis poſſemus internoſcere; rerum ætas indiſcreta nobis, & imperceptibilis cederet Temporis fluxum non perciperemus dico? Imo nec aliud quippiam, at ſtupore continuo defixi ceu ſtipites conſiſteremus aut ſaxa. Nihil enim animadvertimus niſi quatenus aliqua mutatio ſenſum afficiens nos interpellat, aut interna mentis operatio noſtram conſcientiam laceſſit, ac excitat. Ex motûs forinſecùs impellentis, aut intra nos tumultuantis extenſione, vel intenſione diverſos rerum gradus & quantitates æſtimamus. Ita motûs quantitas, in quantum a nobis obſervari poteſt, a motûs extenſione dependet;

[illegible] *per se quemquam tempus sentire possit*
[illegible] *ab rerum motu placidâque quiete;*

Haud malè dixit *Lucretius*, & *Philosophus* ipse; [illegible]
Phys. IV. 18. [illegible] Recte quidem hoc, non videtur nobis, non apparet a somno excitatis quantum temporis intercesserit; at non hinc recte colligitur, [illegible] Non persen- [illegible] ergo non est, illatio fallax, & falsa omnino, qui fecit ut [illegible] semota temporis instantia connectaremus, interim verissi- [illegible] quantus nempe motus fuit, tantum tempus videtur extitisse, neque quam tantum tempus dicimus, aliud consuevimus intelligere, quam tantum motum intercedere potuisse, cujus scilicet extensioni continuò successivæ rerum permanentiam imaginamur coëxtendi. Cæterùm quia tempus alveo semper æquali, non per vices nunc segniùs, tunc rapidiùs præterlabi concipimus (admissâ siquidem illâ disparitate nullam omninò computationem, aut dimensionem admitteret) non ideò motus omnis æquè determinandæ dignoscendæque temporis quantitati censeatur accommodatus, at is præsertim qui summè simplex & uniformis æquabili semper tenore progreditur; mobili parem ubique vim retinente, perque medium uniforme delato. Quare tempori determinando tale quiddam mobile deligendum est, quod saltem quoad motûs sui periodos æqualem constanter impetum servat; & per æquale spatium decurrit. Et ad communem quidem usum accipiendus est ejusmodi motus præcipuè notabilis, in promptu cunctis obvius, & sensus omnium incurrens, qualis est motus syderum, imprimis *Solis & Lunæ*, mirificè sibi per omnia constans, & orbi terrarum conspicuus; qui proinde nedum communi gentis humanæ suffragio deputatus, at divino Creatoris consilio aptus natus est huic usui; à quo nempe pronunciatum legimus: *Fiant luminaria in firmamento Cæli,*
Gen. 1. 14. *& dividant diem ac noctem, & sint in signa, & tempora, & dies, & annos.* At quomodò, dices, cognoscetur *æquabili solem motu ferri, & unum puta diem, aut annum alteri penitus exæquari, vel æqui temporaneum esse?* Respondeo non aliter hoc (excipiendo quod à divino testimonio colligatur) nobis innotescere, quam cum aliis æqualibus motibus ipsum solis motum contendendo. Si nempe deprehendatur solis motus in horologio solari (quod spatiorum à sole in circulis æquatori parallelis percursorum penè certò ac exquisitè quantitates indicat)

eadem sydera periodos eadem, aut eadem periodi partes æquales absolvent; inæqualia verò juncta quamcunque proportionem, in quibus similiter, seu proportionaliter inæquales periodi consumuntur. Neque quisquam objiciat tempus communiter haberi pro mensura motûs, & consequenter ad hoc motûs differentias (velocioris, tardioris, accelerati, retardati) ad tempus ut præcognitum definiri, nec ideò temporis quantitatem è motu, sed motûs quantitatem a tempore determinari, nil enim obstat quo minus tempus & motus hæc sibi mutuo præstent officia. Sane veluti spatium ex aliqua primum magnitudine metimur, & quantum sit discimus, è spatio posteà reliquas ei congruas magnitudines æstimamus; ita tempus primo taxamus è motu quodam, posteà motus reliquos ex eo dijudicamus; quod planè nihil est aliud quàm mediante tempore motus alios tum alios comparare; sicut & mediante spatio magnitudinum inter se rationes investigamus. Qui nimirum è temporum proportione motuum colligit proportionem, nil aliud quam ex organorum horologicorum, vel ex Solarium motuum simul decursorum proportione dictam elicit motuum rationem. Quod certè vidit, & exertè docuit *Aristoteles*: ὁ χρόνος (inquit) τῶν ἀνισοταχῶν κύκλων μετρεῖται, ἀλλὰ καὶ ἑκάστῳ τῶν ἄλλων κινουμένων διὰ τὸ ἀεὶ ἔχειν ἄλλο καὶ ἄλλο τὸ ἀφεστηκός. Porrò, quia tempus, ut ostensum, est quantum uniformiter extensum, cujus omnes partes æquabilis motûs partibus respectivis, seu spatiorum æquabili motu peractorum partibus proportione respondent, possit id quam optimè per magnitudinem quamlibet ὁμοιομερῆ repræsentari, hoc est menti nostræ seu phantasiæ proponi; per simplicissimas præsertim, quales sunt linea recta, & circularis; quibuscum etiam & tempore similitudines & analogiæ non paucæ intercedunt. Præterquam enim quod tempus partes habet omnino similares, rationi consentaneum est ipsum velut unicâ dimensione præditum quantum considerare; ipsum enim velut ex simplici supervenientium momentorum additamento, vel ex unius momenti quasi continuo fluxu constitutum imaginamur, & solam proinde longitudinem ei solemus attribuere; nec ejus quantitatem alias quam ex lineæ decursæ longitudine determinamus. Sicut, inquam, linea puncti promoti censetur vestigium, a puncto habens quod aliquatenus divisibilis sit, a motu vero quod uno modo, secundum longitudinem, dividi possit; ita tempus velut instantis continuò labentis vestigium concipiatur, ab instante nonnullam indivisibilitatem habens, a successivo fluxu quod eatenus dispertiri queat. Et sicuti lineæ quantitas ab unica longitudine pendet motum consequente, ità temporis quantitas ab unica consectatur velut in longum expor-

Phys. IV. 28.

exporrecta successione, quam spatii decursi longitudo demonstrat, ac determinat. Tempus itaque per rectam lineam semper designamus, arbitrariè quidem initio sumptam & expositam, at cujus partes proportionalibus temporis partibus, & puncta temporis instantibus respectivis justè respondebunt, & iis appositè repræsentandis inservient. His de tempore prælibatis ad considerandum vim motus effectivam procedimus, quæ sanè (quæcunque sit ejus natura, vel undecunque procedat, nam ista *Physicis* disquirenda relinquimus) merito quoque seu quantum quid concipitur, & sicut alia quanta computo subjicitur. Etenim experientiâ compertissimum est, sæpe duorum mobilium ab eodem termino per eandem orbitam delatorum alterum alteri præverrere, seu majus eodem tempore spatium conficere. Nec aliunde potest hoc provenire, quàm à majori vi, seu potentia motiva, quâ præcellit alterum mobile, cujuscunque gratiâ velocius dicitur. Et quia perspicuum est nil impedire, quin secundum omnimodas proportiones contingat hic spatiorum una peractorum excessus, ideo vis hæc jure concipiatur in partes quaslibet (quas & sicuti partes cujuscunque qualitatis intensivæ succinctæ distinctionis ergo gradus appellare licet, & consuetum est) ire partes, inquam, quaslibet infinitas, aut indefinitas divisibilis concipiatur, quas inter se nectens, & à se dirimens communis terminus, vel (juxta suppositionem quòd quanta constant ex infinitis atomis) pars absolutè minima dicatur quies, hoc est summa tarditas, aut infima velocitas, è cujus fucrescentia, vel intensione continua velocitatis gradus quilibet eo modo concipiatur aggregari, vel produci, quo linea è punctorum appositione, vel motu, tempus ex instantium successione vel fluxu progenitum imaginamur. Unde rem absolutè considerando, quo vis hujusce quantitas menti seu phantasiæ rectè proponatur, sufficit ejus vice magnitudinem quamvis regularem exhibere (hoc est talem, in cujus partibus quamvis differentiam, quamlibetque proportionem clarè promptéque valeamus apprehendere) simplicitatis adeò perspicuitatisque causâ cuilibet ejus repræsentando gradui recta linea cum primis accuratè quadrat. Ità quidem in se generatim & absoluta spectata vis ista tempus non implicat, eóque secluso concipi potest (in quolibet enim temporis instanti, perque quodcunque temporis intervallum eâ præditum mobile concipiatur) at quatenus comparabilis, ac æstimio Mathematico subdita, quâ ratione velocitas dicitur, cum spatio tempus adsignificat, è quibus nempe quantitas ejus dijudicatur, ac discernitur definitur idcirco velocitas potentia, quâ mobile spatium aliquod in aliquo tempore pertransire potest. Unde consectatur singularem

velo-

gularem velocitatis cujuſpiam quantitatem nec ex ſola confecti ſpatii, nec ex abſumpti temporis quantitate dignoſci poſſe (quælibet enim velocitas aliquo tempore quodvis aſſignatum ſpatium emetiatur) aſt ex ſpatii ſimul ac temporis quantitatibus ad calculum redactis eam innoteſcere; ſicut & viciſſim temporis abſumpti quantitas non niſi ſpatii ſimul ac velocitatis agnitis quantitatibus determinetur. Quinimò ſpatii quoque quantitas (quatenus hoc modo per motum dignoſcibilis eſt) nec è ſola definitæ velocitatis quantitate, nec ab aſſignato tanto tempore dependet, aſt ab utriuſque ratione conjuncta. Et quidem ut hæc quomodo ſe reſpiciant ampliùs exponamus, ſpatii quatenus hoc modo computatur quantitas eo ferè dignoſcitur modo, quo è dimenſionibus ſuis quanta ſit ſuperficies innoteſcit; è quantitate ſcilicet unius lineæ, (quæ longitudinem ejus aut altitudinem oſtentat) & è quantitatibus ſingularum invicem ſibi parallelarum linearum, quæ per iſtius lineæ puncta quæque tranſeuntes ſuperficiem totam quodammodo conſtituunt, & componunt; eam ſaltem limitant atque determinant; hoc eſt quaſi per ductum ſingularum ejuſmodi linearum in reſpectiva dictæ lineæ puncta. Velocitatis autem, & temporis quantitates pariter eo modo diſcernuntur, quo ex ſuperficiei, & unius cui applicatur dimenſionis quantitate diſcernitur quanta ſit reliqua dimenſio (ubivis, inquam, aut ſaltem alicubi quanta, nam fieri poteſt ut reliqua dimenſio quatenus per omnia prioris dimenſionis puncta diffunditur, ſibi paſſim diſpar & difformis ſit; quid velim è veſtigio conſtabit, nam utilis hæc conſideratio poſtulat enucleatiùs declarari. Omni temporis inſtanti, ſeu indefinitè parvæ temporis particulæ (inſtanti dico, vel indefinitæ particulæ, nam uti nihil admodum refert, utrùm lineam ex innumeris punctis, an ex indefinitè parvis lineolis compoſitam intelligamus, ità perinde eſt, utrùm tempus ex inſtantibus, an ex innumeris minutis tempuſculis conflatum ſupponamus; nos ſaltem brevitati conſulentes pro temporibus quantumlibet exiguis inſtantia, hoc eſt pro tempuſcula repræſentantibus lineolis puncta non verebimur uſurpare) cuilibet dico temporis momento competit velocitatis aliquis gradus, quem mobile tunc habere concipiendum eſt; cui gradui reſpondet aliqua decurſi ſpatii longitudo (nam hìc mobile tanquam punctum, & ſpatium proinde tantummodò ceu longum conſideramus) quia verò temporis momenta quoad rem ipſam neutiquam à ſe dependent, ſupponi poterit in proximo inſtanti mobile gradum velocitatis alium (alium inquam vel æqualem priori, vel in quavis proportione diverſum) admittere, cui proinde reſpondebit alia ſpatii longitudo, tali proportione reſpiciens priorem, quali velo-

velocitatis hic gradus præcedentem. Quum enim temporis inſtantia prorſus æqualia ſint inter ſe, ſpatiolum longitudinum ratio à ſola velocitatem ratione dependebit, eique proinde par erit, aut ſimilis (quod niſi pro veriſſimo ſumatur, haud ullo modo menſurari poſſit velocitas; nam à ſola ſpatiorum eodem tempore decurſorum (vel eodem inſtanti) proportione velocitatum inter ſe collatarum immediatè vel mediatè ratio taxatur, & altera alterius reſpectu denominatur tanta) ſimiliter ſi per omnia temporis cujuſvis momenta qui conveniunt ipſis velocitatis gradus aſſignentur, aggregabitur ex iis quantum quiddam, cujus partibus quibuſvis decurſorum ſpatiorum partes reſpectivæ, hoc eſt iiſdem temporibus reſpondentes particulæ, juſtè proportionantur, adeóque quantum è gradibus iſtis conſtans repræſentans magnitudo ſpatium quoque decurſum repræſentare poſſit, quatenus nempe qualem ſpatii partes temporibus ſingulis peractæ proportionem inter ſe ſervant, exactè referat. Quum igitur, utpote quàm æquabiliſſimè fluens per lineam, ut præmonuimus, rectam aptiſſimè repræſentetur, & qui in ſingulis temporis inſtantibus habentur alii ac alii, ſibimet æquales; aut inæquales, velocitatis gradus per lineas itidem, ut prius etiam inſinuatum eſt, rectas exprimantur, & cùm hi velocitatis gradus ſingula temporis momenta alii ac alii permeent, independenter à ſe invicem ac impermixtè; itaque ſi per lineæ tempus repræſentantis omnia puncta trajiciantur rectæ ſic diſpoſitæ, ut altera nulla nulli alteri coincidat, hoc eſt in ſitu parallelo; quæ reſultat hinc ſuperficies plana (pro quantitate temporis, & poſitorum velocitatis graduum ratione determinata) graduum velocitatis aggregatum exactiſſimè referet; cujus ſuperficiei partes cùm reſpectivis (ut prædictum) ſpatii peracti partibus proportionales ſint, poterit id ſpatio quoque repræſentando commodiſſimè adaptari. Iſta verò ſuperficies brevitatis causâ dehinc appellabitur velocitas aggregata, vel ſpatii repræſentativa. Neque quenquam afficiat, nam ſubmovenda nobis hæc remora, quod diximus in ſingulis temporis inſtantibus longitudinem aliquam confici, quaſi dari poſſe motum inſtantaneum affirmarem. Nam poſito tempora è momentis componi, etiam lineæ componentur è punctis; quòd ſi lineæ inæquales componantur è punctis infinitis, ſibimet æquinumeris, neceſſariò ſequitur linearum puncta, juxta ſimilem cum ipſis proportionem inæqualia fore, adeóque per longitudines in æquitemporaneis momentis decurſas duntaxat intelligenda ſunt ejuſmodi inæqualia puncta, è quibus tota decurſa longitudo quaſi conflatur. Sin hoc abſonum cuipiam videatur, & nullo ſenſu motus admittatur inſtantaneus,

ſtantaneus, eò recurrendum ut per inſtantias nil aliud, quàm indefinitas temporis particulas intelligamus; quibus reſpondeant certo velocitatis gradu, alio atque alio, percurſa indefinitè minuta ſpatiola velocitatis gradibus adproportionata; tum autem repræſentando ſingulo cuipiam velocitatis gradui per tempuſculum aliquod retento, loco lineæ rectæ ſubſtituatur oportet exiguum rectangulum dicto tempuſculo applicatum. Perinde fuerit, ac eodem recidet hoc an illo modo ſe res habeat; aſt ſimplicior & clarior videtur iſte modus, quem prius expoſuimus, cui proinde poſthac inſiſtemus. Ut redeam, & recolligam; ſicuti per omnia lineæ rectæ puncta traduci poſſunt parallelæ rectæ, magnitudine pro lubitu pares, vel impares, è quibus aggregatis ſuperficiale planum exurgat, ità ad ſingula temporis inſtantia applicari poſſunt velocitatis gradus diverſi, pares vel impares, prout mobile per totam ſuam lationem vel eundem impetum retinere, vel aliquando varium adſciſſere ſupponatur, utcunque creſcendo vel decreſcendo. Si velocitatem ſemper eandem conſervare dicatur, facilè patet è dictis velocitatem aggregatam definito cuivis tempori convenientem rectiſſimè per figuram parallelogrammam exprimi, qualis eſt AZZE, in qua latus AE temporis definiti vicem obit, reliquum AZ, eíque parallelæ rectæ omnes BZ, CZ, DZ, EZ velocitatis gradus ſingulos per ſingula temporis momenta penetrantes, in hoc ſcilicet caſu pares, exhibent. Poſſunt etiam, ut dictum, parallelogramma AZZB, AZZC, AZZD, AZZE ſpatia reſpectivis temporibus AB, AC, AD, AE decurſa appoſitè deſignare. E qua conſideratione ſola, vel intuitu primo mòtûs hujuſmodi, quem æquabilem, & uniformem vocitant, omnia ſymptomata deduci poſſunt. Quales ſunt: quòd æquali perpetuò velocitate tranſmiſſa ſpatia ſeſe habent ut tempora: Quòd æquali tempore peracta ſpatia ſeſe habent ut velocitates; & vicíſſim: Si ſpatia ſunt ut velocitates tempora fore æqualia; ſi ut tempora, velocitates æquari. Et ſi æqualia ſpatia fuerint, tempora velocitatibus proportione reciprocari; contráque, ſi tempora velocitatibus proportione reciprocentur, ſpatia ſibimet exæquari. Spatia denique quælibet compoſitam habere rationem è rationibus velocitatum & temporum; nec non, ſubducendo rationem temporum è ratione ſpatiorum reſiduam manere rationem velocitatum, vel ſubducendo rationem velocitatum relinqui rationem temporum. Hæc enim parallelogrammorum inter ſe comparatorum affectiones ſunt (æquiangulorum intelligo parallelogrammorum; nam ubi repræſentativa, hæc parallelogramma conferuntur inter ſe, æquiangula conſtituantur oportet; alioqui cùm

Fig. 1.

fin-

ſingillatim ſpectantur; nihil refert quinam angulus ſtatuatur) hæc, inquam, è parallelogrammorum natura liquent, & ex iis quæ poſuimus ſponte conſectantur; ut nullam aliam demonſtrationem requirere videantur. Et ſanè quoad omnes Mathematicæ ποσὰ ſubditas (hoc eſt utcunque quantitatem involventes) materias cùm magnâ facilitate Theoremata perſpicere, tum ſummo eadem compendio demonſtrare poterit, quiſquis contemplationi ſuæ ſubjecta cujuſcunque generis quanta ad analogicas magnitudines ritè congruéque novit redigere. Quòd ſi porrò velocitatis gradus continuò per ſingula temporis inſtantia ſupponantur æqualiter adaugeri, vel imminui, à gradu minimo, ſeu quiete, definitum ad velocitatis gradum, vel à definito tali gradu ad quietem; conſimili pacto poterit aggregata velocitas per quamvis ſuperficiem æqualiter à puncto creſcentem ad definitam magnitudine lineam; vel eodem retrogradè paſſu decreſcentem, exhiberi; ſimpliciſſimè verò, & optimè per triangulum rectilineum; ut puta per triangulum A E Y, in quo crus A E tempus denotat; ejúſque punctis applicatæ lineæ parallelæ B Y, C Y, D Y, E Y gradus velocitatis ſingulis inſtantibus congruos à puncto A (quod quietem, vel infimam velocitatem refert) ad definitum gradum lineâ maximâ E Y repræſentatum æqualiter increſcentes; vel ab eadem E Y retrò ad punctum A quietis repræſentativum declinantes. Sed & pari jure, quo priùs, trigona A B Y, A C Y, A D Y, A E Y per reſpectiva ab initio tempora decurſis ſpatiis repræſentandis inſervient. Et conſequenter, ſi velocitas æqualiter à definito gradu ad gradum definitum ſupponatur augeri, vel diminui, repræſentabitur tam aggregata velocitas, quàm ſpatium ei reſpondens à figura quadrangula Trapezia, qualis eſt C Y Y E, in figura priùs adhibita. Hinc, non ſecùs quàm in præcedentibus, hujuſmodi motûs quem uniformiter acceleratum nomine perquam apto *Galilæus* nuncupavit) affectiones omnes præcipuæ facilimè deprehendentur, atque demonſtrabuntur; cujuſmodi ſunt: Quòd æquali tempore conficietur æquale ſpatium per motum à quiete uniformiter acceleratum, ac per ipſum motum uniformem, modò velocitas hujus ſubdupla ſit velocitatis, quam ille maximam habet. Quòd ſpatia motu à quiete uniformiter accelerato peracta, ſeſe habent ut *Quadrata temporum* (vel in duplicata temporum proportione.) Et diverſos hoc modo acceleratos motus comparando: Quòd ab illis tranſacta ſpatia habeant rationem è rationibus temporum, & velocitatum maximarum: Et ſimilia talia vel his connexa, vel indè conſequentia, quæ triangulis conveniunt inter ſe quoad ſuas, & quoad laterum rationes comparatis; quæ ex poſitis haud difficilè perſpiciantur, ac demonſtrentur. Fig. 1.

ſtrenuè. Porrò, non abſimiliter ſi velocitatis gradus continuâ per ſingula temporis inſtantia ſucceſſione, à quiete ad definitum gradum, vel retrogradè, creſcere concipiantur, aut decreſcere juxta progreſſionem numerorum quadraticorum repræſentatur tum optimè velocitas aggregata, ſicut & ſpatium hujuſmodi motu confectum, à complemento ſemiparabolæ, qualis eſt A E X, cujus vertex A quietem (ſeu motûs ac temporis initium) tangens A E tempus definitum, linea B X primum velocitatis accreſcentis gradum (qui ſe habet ut 1.) proximâ C X ſecundum gradum (habentem ſe ut 4.) ſubſequens D X (qui ſe habet ut 9.) & ità porrò uſque ad ultimum E X: Id quod ex notiſſima parabolæ proprietate manifeſtum eſt. Eodem planè modo quivis ſuppoſiti velocitatis gradus, utcunque creſcentis aut decreſcentis, continuò vel interruptè, quovis, inquam, imaginabili modo per lineas rectas ad temporis repræſentatricem rectam applicatas certiſſimo, commodiſſimòque modo deſignari poſſunt, aſſervatâ quam quis adſignare voluerit proportione; ſic ut indè cognitâ ſpatii repræſentantis dimenſione, ſpatii per motum confecti quantitas faciliùs innoteſcat; & reciprocè, cognitâ ſpatii dicti naturâ velocitatis ac temporis quantitatibus dignoſcendis aliqua lux affulgeat: Quæ quidem poſthac dicendorum intellectui neceſſaria, totique motuum theoriæ non parùm ut videtur utilia viſum eſt paullo fuſiùs expoſita præmittere. Quâ perfunctus operâ pedem figo.

Fig. 2.

LECT.

LECT. II.

VArios, quibus productæ concipiantur magnitudines aggreſſi modos conſiderare, primum & præcipuum attingere cæpimus illum, qui motu peragitur locali. Cùm verò ſoleant *Mathematici* diverſimodos, è quibus aliæ ac aliæ magnitudines reſultant, motus adſumere ceu poſſibiles, duos ad fontes digitum intendimus, è quibus iſtæ motuum differentiæ ſcaturiunt, modum lationis ipſum, & quantitatem vis motivæ; quorum poſteriorem haud ita clarum & apertum nuperrimè conati ſumus recludere, limpidúmque reddere. Jam differentias quas aſſumunt ipſas proſequemur, & quo pacto generationi magnitudinum inſervire poſſunt oſtendemus. Lationis modum ſpectando generantur magnitudines vel per motus ſimplices, vel per motus compoſitos, vel ex concurſu motuum (nam compoſitionem à concurſu diſtinguo, quæ tamen à nonnullis confunduntur.) De ſimplicium motuum hypotheſibus, ac effectis primò videamus. Simplicium motuum duo genera ſunt, φορὰ, & περιφορὰ, progreſſio, & circumlatio. Sub progreſſivo motu comprehenditur motus omnis, qui nullum fixum locum (loci nomine quamvis magnitudinem, etiam punctum adnumerans, intelligo,) reſpicit, cui velut innectitur, ac affigitur; ſeu directus iſte motus ſit, ſeu reflexus, ſeu refractus; ſive callem certum perſequatur, ſive inconſtanter deſultet, divagetur, exorbitet. Quia vero penitus irregularium in arte nulla ratio poteſt haberi, ſufficit *Mathematicis* ſupponere magnitudinem quamcunque progredi poſſe juxta deſignatam quamlibet orbitam; ut *v. g.* Quod punctum *in linea recta, circulari, elliptica, ſpirali, vel alia quavis præſtituta queat incedere.* Verùm præcipuæ, hoc eſt maximi, frequentiſſimique pro magnitudinibus efformandis uſûs, circa hujuſmodi motus quas *Mathematici* præſtruunt hypotheſes, ſunt hæ: Quod punctum à præfixo termino in linea recta quouſque libuerit aſſignare directè progredi queat, quali motu perſpicuum eſt lineam rectam deſcribi:

describi: Quòd linea recta per alterius cujusvis lineæ longitudinem ità procedere possit, ut situm interea parallelum perpetuò servet (hoc est ut ipsa juxta positionem, quam in quolibet temporis momento sortitur, parallela sit sibi secundum positionem suam in alio quovis temporis momento:) Item, quod linea quævis (definitè vel indefinitè protensa, quod in omnibus intelligendum) motu directo, itidem sibi parallelo, progredi possit (directo inquam, hoc est ut ejus singula puncta lineas rectas describant) qui sanè duo motus sibimet æquivalent, eundémque procreant effectum eorúmque alterutro productæ concipiantur illæ, quæ præ cæteris æquabiles, ac uniformes haberi merentur superficies; quales sunt in plano *Superficies parallelogrammæ* (seu penitus rectilineæ, sive mixtæ) in Solido (ut ità dicam, vel non in uno plano delineatæ) *Superficies Prismatica, Cylindricaque*, tum quæ stricto, tum quæ latiori significatu dicuntur. Sit in exemplum primò recta linea B C, cui insistens recta A B per ipsam B C feratur, sibi continuò parallela, donec puncto B ad C promoto recta A B ipsi D C ad A B parallelæ congruat. Manifestum est hujusmodi motu procreari *figuram planam parallelogrammam* A B C D. Patet etiam quodlibet assumptum in A B punctum, ut E, rectam lineam describere, cujus partes E E rectis A B interceptæ, rectæ B C partibus B B, per easdem respectivè rectas A B interceptis (hoc est eodem tempore à puncto B decursis) æquantur. Neque minùs patet, si vice versâ recta B C per ipsam B A feratur, eandem superficiem delineari; omníáque rectæ B C puncta (ceu F) rectas lineas effingere; nec non harum partes F F parallelis B C interceptas respectivis lineæ A B partibus B B adæquari. (Notetur autem abhinc brevitatis ergò tam in his, quàm in similibus casibus harum linearum illam, quæ motu suo magnitudinem describit à me *Genetricem* dici; alteram autem, juxta quam, vel cui insistens, prior defertur, *Directricem* appellari; quia motæ lineæ processus ab ea dirigitur, vel ad eam accommodatur.) Sit rursus linea quæpiam curva (velut arcus circularis) B C, cui in eodem plano insistat linea recta A B; & per curvam B C continuò deferatur recta A B, sibimet æquidistans, donec punctum B ad C pertigerit, & recta A B demum rectæ D C ad ipsam A B primò positam parallelæ congruerit; describetur hoc motu figura quoque plano (latiore significatu) parallelogramma; quia scilicet adversa hujus figuræ latera sibi parallela sunt, recta A B rectæ D C, & curva A D curvæ B C. Nam & hîc singula quæque *Genetricis* rectæ puncta (velut E) lineas describent *directrici* B C similes & æquales; cùm integras, tum iisdem parallelis A B interceptas partes; si enim duo

Fig. 3.

Fig. 4.

Fig. 5.

puncta

puncta quævis E E rectâ lineâ connectantur, iisque respondentia puncta B B rectâ quoque jungantur, quoniam rectæ E B sibimet æquantur (etenim nil aliud sunt, quam eadem ipsa linea diversum situm obtinens) ac parallelæ secundum *hypothesin*, erunt rectæ E E, B B æquales ac parallelæ. Unde patet curvas E E, B B adæquari sibimet, & assimilari. Adæquari quia subtensæ omnes EE subtensis B B singillatim æquantur; assimilari, quia rectæ A B cum subtensis adjacentibus respectivis E E, & B B pares angulos constituunt, adeóque rectæ ipsæ E E pares iis, quos rectæ B B; ipsæ illæ cum seipsis, & hæ cum seipsis (nam in hujusmodi proportionalitate partium, & angulorum æqualitate, sicut alibi fortasse luculentiùs & fusiùs disseremus, omnis consistit linearum, & quarumcunque magnitudinum similitudo.) Quòd si vice commutatâ linea curva B G fiat linea *Genetrix*, & recta B A *directrix*, hoc est si B C per B A sibi parallela feratur, producetur eadem ipsissima parallelogramma Superficies; & singulæ rectæ B C puncta, veluti F, rectas lineas ad B A parallelas describent; neque non interceptæ F F respectivis B B pares erunt; quod & pari modo ex supposito perpetuo curvæ BC parallelismo facilè consectatur. Sit denique curva quævis (vel è rectis angulos efficientibus composita, quæ curvæ quoque nomen meritò ferat; *Archimedes* saltem è rectis compositas lineas, uti figurarum circulis inscriptarum aut adscriptarum perimetros, πολυγώνων γραμμῶν nomine complectitur; ut & vicissim curvæ quævis lineæ censeri possunt è rectis, innumeris quidem illis indefinitè parvis, adjacentibus, & deinceps secum angulos efficientibus, conflatæ) sit, inquam, talis aliqua curva B C, in plano quovis constituta, tum in alio plano, vel super lineæ B C planum ut libet elevata, recta A B sibi continuò feratur parallelà, modo quo semel ac iterum ostendimus; describetur hujusmodi motu *Superficies cylindrica* (vel certè *prismatica*, si *linea directrix* è rectis ponatur. composita) & *cylindrica* quidem strictè dicta, si *directrix fuerit linea circularis*, *aut elliptica*; latiore verò sensu talis, si curva fuerit alterius generis ut *parabolica* puta, vel *hyperbolica*, vel alia quæpiam. In hoc autem motu lineæ quoque genetricis singula puncta similes & æquales describunt curvæ directrici lineas; æquales (ut in mox præcedente discursu) quoniam E B pares ac parallelæ sunt; adeóque E E, B B quoque pares, ac parallelæ; similes; *quoniam etiam anguli E E E, angulis B B B æquantur. Quinetiam reciprocè describatur eadem Superficies ponendo curvam B C per rectam A B parallelos deportari. Quomodo singula quoque curvæ B C puncta rectas parallelas & pares interceptis respectivis

Fig. 5.

Fig. 6.

10. XI. Elem.

rectæ

rectæ A B partibus delineabunt, pariter ut antehac in figuræ planæ exemplo commonſtratum eſt; unde ſi ſuperficies hoc modo procreatæ à plano quolibet ad rectam ſeu genetricem, ſeu directricem (quam ubique ſitam Superficiei productæ latus appellare licet) parallelo ſecetur, ſectio communis duabus rectis parallelis conſtabit æqualibus inter ſe. De Superficiebus autem ità progenitis obſervatu dignum eſt (nec enim planè nudas magnitudinum generationes indigitare, ſed & generales nonnullas ipſarum affectiones è diverſis reſultantes generandi modis inſinuare propoſitum eſt nobis) quòd ſi linea directrix recta ſit (ut in figura per literam Z diſcriminata) Superficiei productæ partes parallelis lineis genetricibus interjectæ reſpectivis directricis lineæ partibus ſemper proportionales ſunt (ſuperficies nempe B C C B reſpectivis rectis B B:) At ſi linea curva pro directrice habeatur (ut in figura Y) non ſemper eveniet, ut interceptæ genetricibus rectis Superficies interceptis curvæ directricis partibus proportionentur, at ſaltem accidet hoc, cùm recta genetrix A B æqualiter ad curvam B C ubique, vel ſecundum omnia ejus puncta inclinatur, quomodo fit in cylindri cujuſcunque, laxè vel ſtrictè dicti, recti ſuperficie, quia tum recta
Fig. 6. genetrix omnibus curvæ punctis (hoc eſt omnibus eam ad dicta puncta tangentibus, ſive ſubtenſis rectis eſt perpendicularis.) Verum ſi, in exemplum, curva B C ponatur arcus circularis, qui dividatur æqualiter ad puncta B, non erunt neceſſariò ſuperficies A B B A peripheriis æqualibus B B inſiſtentes inter ſe pares, quia (præterquam in caſu prædicto cylindri recti) rectæ A B ubique ad puncta B inæqualiter inclinantur (unam quamvis inclinationem cum alia conferendo) angulos nempe cum tangentibus ad B aliis ac aliis, & cum ſubtenſis B B æquales efficiunt. E qua re pendet *inſuperabilis illa difficultas*, quacum conflictantur, qui *cylindricas obliquas ſuperficies conantur dimetiri, ſeu cum Cylindricis Superficiebus rectis, aliiſve quadantenus cognitis Superficiebus quoad proportionem comparare.* Supponunt denique conſimili pacto ſuperficiem quamvis planam directo motu ſibi parallelo progredi, ſcilicet ut prædicto modo, ſingula ipſius puncta lineas rectas deſcribant, inter ſe pares, ac parallelas; vel ut ejus ſingulæ rectæ (id quod indè conſectatur) planas Superficies parallelogrammas effingant; cujuſmodi motu deſcribuntur priſmatica quæque cylindricáque corpora; illa nimirum ipſa, de quorum Superficiebus mox egimus, quibúſque ſimili jure poſſunt adaptari, quæ Superficiebus iſtis oſtendimus convenire. Veluti quòd parallelis planis interjectæ Superficies ipſorum, & ipſa corpora lateribus ſuis (ſeu directricis rectæ partibus reſpectivis) proportionantur. Quòd & ſi definita hujuſmodi corpora

planis

planis laterum alicui parallelis secentur, communes sectiones erunt *Parallelogramma* (quale est E E B B.) Quin, ut paucis complectar multa, quæ *de Superficiebus aut Solidis Prismaticis ac Cylindricis strictè dictis generatim enunciantur aut probantur uspiam*, quòd ea pleraque justam analogiam observando, universis congruunt hoc modo progenitis quantis. Neque jam de progressivo motu quidpiam succurrit adjiciendum; quædam enim δυσδιήγητα consultò videntur reticenda. Porrò simplicis motûs alterum genus, quod adhibet *Mathesis*, est *circumlatio, seu motus conversivus*; qui tum scilicet efficitur, cùm dimotæ magnitudinis quiddam (ut punctum aliquod puta lineæ, vel Superficiei linea) fixum & immotum consistit, dum ei velut innodata ac adstricta tota reliqua magnitudo, juxta quamvis assignatam directionem, circumagitur. Cujusmodi motûs generalissima proprietas est, ut quæque mobilis puncta dum in uno aliquo plano transversè moventur, circulares singula peripherias describant; & quidem omnia, quæ in eodem uno, per fixum punctum transeunte plano moventur parallelas, seu concentricas, & similes inter se; quæ verò in diversis planis similes, aut dissimiles, prout hypothesium exigit arbitraria diversitas. Præ cæteris autem propria, maximéque naturalis est circumlatio, cùm singula mobilis puncta circulares unius ejusdem circuli peripherias describunt, hoc est cùm in uno cuncta plano circumferuntur; qualem certè tum ipsa natura sponte concipit atque prosequitur, cùm nè rectos suos quos præsertim affectat motus exequatur ab immobili retinaculo prohibere; velut in pendulorum, & libris appensorum motibus videre est; imò cùm objectâ quâvis resistentiâ non satis facilè recto tramiti valet inhærere; sicut in *rotarum, & vorticum, & turbinum, & in ipsorum fortasse syderum, motibus adparet*. Verùm hujusmodi motuum generalem indolem haud ità promptum est verbis explicare. Præstat ipsas quas accipiunt præcipuas hypotheses percensere. Assumunt primò rectam lineam in plano circa punctum quodvis in ipsa fixum posse circumferri; cujusmodi motu patet omnia lineæ motæ puncta circulares peripherias describere; singulas ab uno quovis descriptas singulis ab altero quolibet simul eodem tempore descriptis parallelas, & similes. Ut si linea recta A B manente fixo puncto C circumferatur, singula puncta A, E, B peripherias circulares A A, E E, B B sibi parallelas, & similes omnes (iisdem nimirum, aut æqualibus angulis subtensas, quorum commune centrum, aut vertex C) describent. Hoc autem modo constat procreari circulos, & sectorum circulares areas (quales ACA, BCB,) sed & annulos planos; qualis est is qui restat, si è circulo Fig. 7.

majore A A B B detrahatur minor circulus concentricus E E E E. E qua geneſi colligitur circulorum, & ſectorum circularium areas, è circularibus peripheriis, integris aut partialibus concentricis ac ſimilibus, conſtare tot numero quot radius puncta habet; quarum proinde calculum ineundo circularis areæ talis qualis dimenſio quàm facillimè reperitur; id quod non eſt hujus temporis ulteriùs exponere. Quinetiam ſupponunt lineam quamvis rectam, indefinitè protenſam, uno manente fixo ipſius puncto circa deſignatam quamvis in alio plano conſtitutam lineam, curvam aut è rectis compoſitam, revolvi, ſic ut ei nempe lineæ ſemper inſiſtat, vel eam quaſi lambat, aut perſtringat. Fig. 8. Sit, exempli causâ, linea recta A B indefinitè protenſa, & in ea fixum punctum V, & per V ſemper feratur linea A B juxta lineam quamlibet B C in alio plano collocatam; ità quidem ut aliquod lineæ mobilis punctum continuò lineæ B C inhæreat, ex hujuſmodi motu producetur curva Superficies (è planis ſaltem compoſita, quam & generali ratione, poſt *Archimedem*, curvam appellare nil vetat) quæ quidem ſi linea directrix tota componatur è definitè magnis rectis lineis, fiet *Superficies pyramidalis*, è triangulis ad verticem V concurrentibus aggregata; ſin circularis fuerit, aut conicarum ſectionum aliqua, Superficies evadet ſtrictè *conica*; ſin alterius generis aliqua, conica ſaltem extenſo latiùs ſignificatu dicatur; & à quibuſdam dicitur. Cujus quidem Superficiei proprietas eſt, ex ipſa generatione manifeſta, quòd ſi per fixum punctum V plano ſecetur, communis plani cum ipſa ſectio erit angulus rectilineus. Nam ſi planum ipſam ſecans per V lineæ directrici occurrat in punctis duobus, ut in D, E (occurret autem in duobus, aliàs Superficiem ipſam non ſecaret) ductæ rectæ V D, V E erunt tam in plano ſecante, quàm in curva Superficie; in plano, ex plani natura; in Superficie, quia genetrix eadem recta per harum terminos tranſit, ipſiſque proinde coincidit. In hujuſmodi verò motu poſito quòd lineæ rectæ à puncto fixo V (ſeu vertice) ad directricem lineam B C ductæ ſunt inæquales inter ſe, ſatis liquet lineam B C non à lineâ B delineari, vel perambulari, quia lineæ inæquales (ut V B, V E, V C) ſibi nequeunt congruere; Fig. 8. adeóque punctum B progrediens ſupra, vel infra puncta B, E, C cadet; ut nec eâdem inæqualitate ſuppoſitâ punctum quodvis aliud in V B puta G) motu ſuo lineam deſcribet lineæ directrici B C ſimilem (quare linea V B ſupponitur indefinitè protenſa) at verò ſi lineæ omnes, quæ ab V ad B C duci poſſunt (quas Superficiei propoſitæ latera nuncupemus licet) proportionaliter ſecentur (id quod fiet à plano per hanc Superficiem trajecto ad planum, in quo ſita eſt B C, parallelo) diviſionum

ſionum puncta lineam conſtituent, ſaltem ad lineam conſiſtent, ipſi BC ſimilem. Ductis enim quotlibet lateribus VB, VD, VE, VC, & ducto plano GKLH ad planum BDEC parallelo, ſint communes plani VBD cum planis BC, GH ſectiones rectæ BD, GH; hæ parallelæ erunt. Item communes plani VDE cum iiſdem planis BC, GH Sectiones DE, KL parallelæ erunt. Ergò anguli BDE, GKL ſunt æquales. Item ſe habet recta BD ad GK, ut DE ad KL, quia utraque hæc proportio æqualis eſt illi, quam habet VD ad VK (ſimilia quippe ſunt triangula VDB, VKG, & triangula VDE, VKL) permutandóque BD. DE :: GK. KL. ergò omnes ſubtenſæ in GH proportionales ſunt ſubtenſis omnibus in BC, eas nimirum in utraque linea ordinatim & deinceps accipiendo; & quæ ſibimet adjacent in una pariter inflectuntur cum iis, quæ ſibi adjacent in altera. Ergò ſecundum ſuperiùs inſinuata lineas BC, GH ſimiles eſſe conſtat. || Hinc etiam patet lineas curvas ſimiles BC, GH eandem ad ſe proportionem habere, quam Superficierum, in eadem qualibet recta ſita, latera VB, VG. Quum enim ſubtenſarum iiſdem angulis incluſarum (ut BD, GK, vel DE, KL) ſingulæ rationes æquales ſint rationi laterum VB, VG; etiam omnes antecedentes conjunctæ (hoc eſt tota BC) ad omnes conſequentes conjunctas (hoc eſt totam GH) ſe habebunt ut VB ad VG. Hinc etiam tali motu productarum ſuperficierum emergit hæc proprietas; quòd interceptæ ſcilicet à parallelis ad BC planis, à vertice deſumptæ, quibuſcunque lateribus iiſdem incluſæ partes ipſarum ſint inter ſe ſimiles; ut puta Superficies BVC, GVH; & BVD, GVK. (Quod ex generali ſimilitudinis doctrina poſthac explicanda luculentiùs apparere poterit; interim ex ſimilitudine linearum curvarum, & earum cum Superficiei lateribus analogia, penitúſque conſimili Superficierum generatione ſatìs eluceſcit; ſaltem ex triangulorum VBD, VGK; & VDE, VKL, & talium omnium ſimilitudine ſatìs conſtat; ſiquidem ex talibus infinitis triangulis utraque Superficies compoſita cenſeatur.) Unde ſimilium Superficierum proprietates iis convenient. Verùm quòd interceptas attinet à diverſis lateribus Superficies, eas inter ſe comparando, notandum eſt quòd baſibus ſuis, ſeu directricis lineæ reſpectivis partibus non ſemper proportionales ſunt; at ſaltem hoc tum evenit, cùm omnia dictæ Superficiei latera ſunt æqualia inter ſe, adeóque cùm linea directrix eſt peripheria circuli; quo caſu producta Superficies erit conica Superficies ſtrictè dicta, rectúmque quidem ad conum pertinens. Quod ſi directrix BC ſupponatur e. g. peripheria circularis, lateráque ſibimet inæqualia, ſi

16. XI. Elem.

10. XI. Elem.

12. V. Elem.

dividatur B C in partes æquales, & connectantur latera V D, V E non erunt Superficies B V D, D V E, E V C æquales inter se, sed inscrutabili plerumque ratione; juxta varias angulorum inclusorum, & laterum inæqualium differentias, inæquales, id quod hactenus illos divexavit & torsit, *qui dimetiendæ coni scaleni superficiei incubuerunt.* || Ex his consectatur quòd possit hujusmodi circumlatio facta quadantenus concipi motu quoque tali lineæ rectæ genetricis, ità ut ejus singula quæque puncta parallelos lata similes directrici lineæ lineas describant, modo tamen concipiatur linea genetrix ubique proportionaliter aut contrahi, vel dilatari secundum omnes sui partes. Quomodo nempe si recta V B ita sensim diduci concipiatur, ut punctum B totam lineam B C perambulet, etiam punctum G parallelo ad B C motu delata, lineam G H ipsi B C similem describet. Quinimò si consimili pacto curva B C, directo quoad lineam rectam B V motu sinúque semper ad seipsam parallelo concipiatur promoveri, sic ut ejus singula quæque puncta lineâs rectas describant, secum omnes in punctum V concurrentes, hoc est ità ut ipsa per totum suum progressum juxta suas omnes partes analogicè contrahatur, ad verticem usque V; producentur ex hujusmodi motibus Superficies conicæ prorsus eædem cum jam proximè tractatis. Verùm hujusmodi motus imaginarii sunt, & quales rerum natura respuit. Explicandæ tamen hujusmodi Superficierum naturæ deservire possunt, & supponi saltem ut per *divinam potentiam effectibiles.* || Ad hæc, si *linea directrix* in motu proximè memorato supponatur undique clausa, sic ut figuram quamvis comprehendat, Superficies curva progenita cum hac figura, ceu basi, corpus solidum includet pyramidale, vel conicum (strictè vel laxè pro dictæ figuræ natura sumptum) cujus generalia symptomata satis è dictis elucescunt. Nempe quod à parallelis ad hujusce solidi basin planis abscindentur similes ad verticem Superficies, similésque bases intercipientur, & similia corpora Solida progignentur. Verbo dicam, quæ de *Conis* generatim *Euclides*, *Apollonius*, aliique tradiderunt, ea conicis hoc modo factis, servatâ debitâ analogia, convenient, & simili ferme modo demonstrabuntur convenire. || Verùm usitatissimus apud Mathematicos corpora progignendi modus est is qui peculiari nomine *Rotatio* dicitur, & fit supposito lineam quamvis, aut quamlibet Superficiem planam circa rectam lineam fixam, tanquam axem, revolvi. Quomodo ex motu Semiperipheriæ circularis circa diametrum producitur *Sphærica Superficies*, ex motu Semicirculi ipsius circa eundem *Sphæra* detornatur; ex motu lineæ rectæ circa lineam ipsi parallelam *Superficies Cylindrica*; ex motu parallelogrammi rectanguli circa latus unum ipse *Cylindrus rectus*; ex motu cruris

unius

unius anguli rectilinei circa alterum *Conica Superficies*; ex rectanguli trianguli circa crus unum anguli recti *conus* ipse deformatur, eoque pacto *cum integræ cum suis Curvis Superficiebus Solida magnitudines innumeras, tum ipsarum portiones, fruſta, tubi, annuli procreantur.* Cujuſmodi motûs hæc præcipua proprietas eſt, quòd ſingula quæque magnitudinis circumductæ puncta peripherias obeant circulares (integras quidem illas, modò perfecta ſit revolutio, ſeu mobile denuo primum in ſitum reſtituatur, at ſimiles utcunque ſibi mutuo, quæ ſimul deſcribuntur) quarum omnia Centra ſunt in dicto axe, radii verò ſunt rectæ ab ipſis punctis ad axem perpendiculares. Vel; quod omnes in mobili ſitæ rectæ lineæ axi perpendiculares efficiunt circulos (ſi revolutio ponatur integrè peracta) aut circulares ſimiles ſectores, illos intelligo qui ſimul eodem tempore delineantur. Ut ſi v. g. linea quævis circa axem V K rotetur, eo procreabitur motu curva quædam Superficies, circularibus quaſi peripheriis conſtans (*Atomiſtarum* enim phraſin facilitatis, perſpicuitatis, brevitatis, addere licet & veriſimilitudinis causâ non illibenter uſurpo) circularibus, inquam, peripheriis A Y, B Y, C Y, D Y per puncta A, B, C, D reliquaque quæ ſunt in V D cuncta decircinatis, quarum radii ſunt rectæ A Z, B Z, C Z, D Z axi perpendiculares, & Centra Z in axe. Quòd ſi revolutio tantum eouſque continuatur, donec V A D ſit in ſitu V α δ, conſtabit *effecta Superficies* ex arcubus A α, B ε, C γ, D δ, ſimilibus inter ſe eodem modo ſi planum V D Z circa axem V K revolvatur, poſito quòd integra peragatur converſio, producetur Solidum quaſi conſtans innumeris circulis parallelis A Y, B Y, C Y, D Y; quorum (ut priùs) radii A Z, B Z, C Z, D Z, centra Z; poſitóque quod circulatio deſiſtit in ſitu δ υ K, conſtituetur Solidum è ſectoribus A Z α, B Z ε, C Z γ, & reliquis inter ſe ſimilibus. Cæterùm prætermittenda non eſt animadverſio quædam perquam utilis, & neceſſaria circa *modum Superficierum, & Solidorum hoc modo reſultantium dimenſiones inveſtigandi juxta methodum indiviſibilium, omnium expeditiſſimam, & modò ritè adhibeatur haud minùs certam & infallibilem.* Objicit huic methodo non ſemel, in pererudito ſuo de *Solidis cylindricis ac annularibus libello, doctiſſimus A. Tacquetus*, eóque ſe putat illam deſtruere, quòd per eam inventæ *conorum, & ſpherarum ſuperficies* (quantitates horum intelligo) veræ per *Archimedem* repertæ ac traditæ dimenſioni non reſpondent. Sit exemplo *rectus conus* D V Y, cujus axis V K; per cujus omnia puncta tranſire concipiantur axi perpendiculares rectæ Z A, Z B, Z C, | Z D, &c. è quibus nempe juxta *methodum atomicam* com- Fig. 10, 11, | K ponitur 12.

Fig. 9.

ponitur ipſum *triangulum rectangulum* VKD; & è circulis ad quas ceu radios deſcriptis ipſe *conus* conflatur. Ergò, diſputat, ex horum circulorum peripheriis *Superficies conica* componetur; quod tamen veritati comperitur adverſari; methodúſque proinde fallax eſt. Repono, malè calculum hoc pacto iniri; & in peripheriarum è quibus *Superficies* conſtant computatione diverſam inſtituendam eſſe rationem ab ea, quâ computantur lineæ quibus *plana ſuperficies* conſtant, aut plana, è quibus corpora formantur. Nempe peripheriarum Superficiem curvam conſtituentium è revolutione prognatam lineæ VD cenſeri debet è multitudine punctorum, quæ ſunt in ipſa Fig. 10, 11, 12. linea genetrice VD; quippe cùm per ea ſingula puncta tales peripheriæ tranſeant, nec plures tranſire queant; quicunque ſit axis, ſeu longiùs diſtans, ſeu propiùs adjacens; axis enim ſolummodò, pro longiore vel propiore diſtantia poſitioneque varia, dictarum peripheriarum magnitudinem determinat. Verùm multitudo linearum ex quibus planum DVK ſupponitur conſtare, planorúmque quibus Solidum DVY conſtat, è numero taxanda eſt punctorum in axe VK; nec enim plures intra terminos VK parallelæ, ipſi VK perpendiculares, rectæ, vel plura talia parallela plana duci poſſunt, quam horum punctorum multitudini æquinumera. Quod obſervando *diſcrimen* (ſedulò perpendendum) omnem devitabimus errorem, & *curvarum hujuſmodi rotatu genitarum Superficierum facillimè, reor, omnium quos rei natura ſubminiſtrat modo perquiremus.* Illum commonſtrabo. Pro reperienda v. g. dimenſione *curvæ ſuperficiei* lineæ VD circa axem VK revolutione, concipiatur ipſa VD in directum extendi, ità ſcilicet ut ei exæquetur recta VD; & ad ejus omnia puncta rectæ concipiantur applicari ipſi VD perpendiculares, & peripheriis circularibus, è quibus Superficies curva conflatur, ordine pares; ſingulæ ſingulis, puta AX ipſi AY, & CX ipſi CY, ac ità continuo. Erit ex his parallelis rectis conſtitutum planum VDX æquale *dictæ curvæ ſuperficiei*; hujúſque partes illius partibus reſpectivis. Sin loco *peripheriarum* applicentur ipſarum reſpectivi radii AZ, BZ, CZ, & reliqui; ſpatium ex his rectis conſtitutum (quæ ſanè proportionali cum alteris ſerie procedunt) ſe habebit ad *curvam Superficiem, ut circuli cujuſvis radius ad ejus circumferentiam.* Unde ſiquâ ratione deprehendi poſſit *Summa radiorum peromnia lineæ genetricis puncta tranſeuntium* (hoc eſt ſi *ſpatii VDZ dimenſionem* reperire contigerit) eo ſtatim innoteſcet *curvæ Superficiei dimenſio.* In exemplum, facilitatis ergò, proponatur *conica Superficies* DVY, è rotatu procreata rectæ VD, circa axem VK. Ad rectam VD applicentur

plicentur rectæ AZ, BZ, CZ, DZ ad ipſam VD perpendiculares, & æquales ſingulæ ſingulis in cono circulorum radiis per eaſdem literas deſignatis; fiet autem in hoc caſu *Spatium* VDZ triangulum, quia rectæ AZ, BZ, CZ æqualiter à ſe diſtantes æqualiter increſcunt, id quod trianguli applicatis omninò proprium eſt. Hujus autem trianguli, ex datis altitudine VD & baſe DZ, dimenſio in promptu eſt. Quod ſi fiat *ut circuli radius: Ad circumferentiam ipſius, ità triangulum VDZ ad quartum*, erit hoc quartum æquale *Superficiei conicæ propoſitæ*. Eodem planè modo perquam facilè *Sphæræ, Sphæricarúmque portionum Superficies* (nec, datis & præcognitis iis quæ requiruntur, alias quaſlibet hoc modo natas) inveſtigare licet. At mihi propoſitum eſt generalioribus tantùm inhærere. || Hanc autem magnitudinum geneſin æmulatur, & affinitate quâdam contingit iſte modus, quum circa rectam lineam, (aut quidem circa quamvis aliam) ſimiles innumeræ lineæ, vel figuræ parallelo juxta ſe ſitu diſpoſitæ taliter conſtituuntur, ut ſingulæ centrum ſuum habeant in dicta linea, quæ proinde tanquam axis rationem ſubit, ac talis denominatur. Quomodo, e. c, in *cylindris obliquis*, inque *conis Scalenis* circuli circa lineam quandam rectam conſiſtunt; quæ propterea dicitur ipſorum *axis*, quoniam in ea circulorum parallelorum *centra* exiſtunt. Sed cùm motus ità diſtortos natura non capiat (ſaltem juxta modum operandi ſimplicem quem nunc ſupponimus) & quia poſſunt hujuſmodi magnitudines ut modis aliis genitæ faciliùs concipi, de iis abſtinebimus. Neque non de magnitudinum per motus ſimplices effectione ſufficiet hactenus diſſeruiſſe. ||

Lect. III.

Quomodo per *motus ſimplices progreſſivum, & converſivum effecta concipiantur magnitudines, & qualia generationes iſtas conſequuntur ſymptomata* (nonnulla ſaltem præcipua) *conatus ſumus exponere ad compoſitos nunc, & concurrentes, eidem propoſito ſervientes, motus accingimur*; quorum in effectis diſcernendis velocitates, ſecundum quas ſimplices peraguntur motus, omnino, vel cum primis conſiderandæ ſunt; quarum in generatione per motus ſimplices nulla prorſus habetur ratio. Per eundem enim motum ſimplicem ſeu velocior is ſit, ſeu tardior eadem magnitudo, quamvis non eodem temporis intervallo, producitur; idem nempe *circulus* ex ejuſdem rectæ circa punctum in ea fixum, *eadem Sphæra* ex Semicirculi circa *diametrum* rotatu; quamvis ut hæc fiant eò magis aut minus expectandum ſit, quo ſegnior aut citatior ſupponitur ea progenerans motus. Verum in generatione per motus compoſitos iiſdem manentibus lationis modis, prout unius aut plurium variatur velocitas, nedum ſpecie, ſed etiam quantitate diverſæ magnitudines emergere ſolent, poſitione ſaltem perpetuò differentes. Ut ſi recta A B per rectam A C parallelo deferatur æquabili motu; & ſimul punctum M in A B deſcendat uniformiter; vel ſimul recta A C parallelo quoque uniformi motu deſcendens ipſam A B promotam interſecet in M; ex ejuſmodi motuum compoſitione vel concurſu producetur recta linea A M. Quòd ſi eodem, etiam quoad velocitatem manente motu rectæ A B, immutetur in velocitate motus uniformis puncti M, vel rectæ A C, ità quidem punctum M jam eodem tempore pervenerit ad μ, vel A C ſecet ipſam A B in μ, deſcribetur hoc motu alia recta A μ à priore A M poſitione diverſa. Sin vero, manente rurſus eodem motu rectæ A B, pro motu puncti M, vel rectæ A C uniformi ſubſtituatur motus, quem vocant, æqualiter acceleratus, ex ejuſmodi compoſitione, vel concurſu fiet linea parabolica

Fig. 13.

parabolica A M X vel etiam aliter posita A μ Y (prout hic motus accelerarus gradu ponitur alius ac alius.) Quòd si quâpiam aliâ ratione crescere concipiatur, aut minui dicti puncti vel lineæ velocitas alia progignetur inde, pro ratione *hypotheseos*, diversa species magnitudinis. In his conspicitur exemplis quòd eodem subinde recidant *compositio motuum et concursus*; quod exinde quidem contingit, quia rectæ cujuspiam parallelo motu latæ singula puncta rectas describunt sibi parallelas; unde fit ut perinde sit an punctum ejus aliquod in ipsa fixum deferatur cum ea, vel solutum per lineam ejus directioni parallelam; ut nempe utrùm punctum M in AC fixum cum ea deferatur, an liberè decurrat per rectam AB eâdem velocitate. At sæpe non ita facile per horum utrumlibet modum *magnitudinum generatio* declaretur, sit enim recta AB æquabiliter rotata (hoc est, ita ut temporibus æqualibus æquales efficiat angulos) et simultaneè punctum M ab A in ipsa recta A B continuo motu feratur, etiam uniformi; ex ista *motuum* compositione linea quædam producetur, *helix* scilicet *Archimedea* (nam talia consultò proponimus *exempla*, *quò celebrium apud Mathematicos magnitudinum obiter naturam insinuem*, et instillem minùs ad hæc exercitatis; id transcurrens moneo) cujus generatio per nullos, opinor, mobilium concursus, liquidò commodéque satis explicetur; ita nimirum ut motuum istorum, vel eorum quantitatem determinantium angulorum, seu linearum, ratio, quantitasve dignoscantur. Generari quidem poterit è concursu paralleli motûs rectæ AC; vel circularis motûs rectæ BA circa Centrum quodvis B, concursu cum prædicto regulari motu circa Centrum A; at quæ sit tum futura rectarum AM, Aμ; vel angulorum ABM, ABμ quantitas difficilè constabit. E contrà, si recta BA circa Centrum B motu rotetur uniformi; et simul recta AC per AB parallelos, & uniformiter deferatur, rectarum BA, AC ita latarum intersectio continua lineam quandam efficiet (illam nempe, quæ quadratrix dici solet) cujus generatio non ità clarè per strictè dictam motuum compositionem expediatur, aut explicetur. Generari quidem potest per motum rectum alicujus puncti M in AB delatâ parallelos ad primò positam AB; vel ex puncto tali in AC parallelo quoque delatâ; vel per motum puncti in AB, circa B; vel circa A rotatâ, rectè ab A versus B, vel à B versus A decurrentis; sed hujusmodi suppositâ quâpiam motuum compositione, quænam sit rectarum AM, aut BM; vel angulorum BAM aut ABM aut AMB, vel aliarum quarumvis magnitudinum hosce motus determinantium quantitas, aut inter se relatio, difficulter innotescat. Qua præcipuè de causa

Fig. 14.

Fig. 15.

motuum compoſitionem ab ipſorum concurſu ſecerno, quia nempe magnitudinum generatio nunc uno, nunc alio modò faciliùs explicatur. Verum ad illos diſtinctius exponendos accedo. De compoſitione primum. Cùm autem motus duobus modis compoſitus intelligi poſſit, vel ut è pluribus motibus aggregatus, vel ut de pluribus participans; de poſteriore nos diſſertamus; quem fortè non meliùs quàm præclarus Philoſophi verbis, & exemplis enucleatum dem.

Carteſ. princ. II. 31, 32. "Etſi autem (inquit ille) unumquodque corpus habeat tantùm "unum motum ſibi proprium, quoniam ab unis tantùm corporibus ſibi contiguis, et quieſcentibus recedere intelligitur, participare tamen etiam poteſt et de aliis innumeris; ſi nempe ſit "pars aliorum corporum alios motus habentium. Ut ſi quis ambulans in navi *horologium in* pera geſtet, ejus horologii rotulæ unico tantum motu ſibi proprio movebuntur; ſed participabunt etiam ex alio, quatenus adjunctæ homini ambulanti unam "cum illo materiæ partem component; et ex alio quatenus erunt "adjunctæ navigio in mari fluctuanti; et ex alio quatenus adjunctæ ipſi mari; et denique alio, quatenus adjunctæ ipſi terræ, "ſiquidem tota terra moveatur. Omnesque hi motus revera erunt in rotulis iſtis, ſed quia non facilè tam multi ſimul intelligi, nec etiam omnes agnoſci poſſunt, ſufficiet unicum illum, "qui proprius eſt cujusque corporis in ipſo conſiderare. Ac præterea ille unicus cujuſque corporis motus, qui ei proprius eſt, "inſtar plurium poteſt conſiderari; ut cùm in rotis curruum duos diverſos diſtinguimus, unum ſcilicet circa ipſarum axem, et "alium rectum ſecundum longitudinem viæ per quam feruntur. "Sed quòd ideò tales motus non ſint revera diſtincti patet ex eo, "quòd unumquodque punctum corporis quod movetur unam tantùm aliquam lineam deſcribat. Nec refert quòd iſta linea ſæpe ſit "valde contorta, et ideò à pluribus diverſis motibus genita videatur, quia poſſumus imaginari eodem modo quamcunque lineam etiam rectam, quæ omnium ſimpliciſſima eſt, ex infinitis diverſis motibus ortam eſſe. Ut ſi linea A B feratur verſus "C D, et eodem tempore punctum A feratur verſus B, linea Fig. 16. "recta A D, quam hoc punctum A deſcribet, non minus pendebit à duobus motibus rectis, ab A in B et ab A B in C D, quàm "linea curva, quæ à quovis rotæ puncto deſcribitur, pendet à "motu recto et circulari. Ac proinde quamvis ſæpe utile ſit unum motum in plures partes hoc pacto diſtinguere ad facilioremejus perceptionem, abſolutè tamen loquendo unus tantùm

in

"in unoquoque corpore eſt numerandus. Ita *Carteſius*. Nempe cùm magnitudo quæpiam exinde quod aliis modo quopiam adnectitur, illorum motus ita particeps eſt, ut ab eo quoad ſitum ſinum aliquatenus determinetur, iſte motus hujus compoſitionem quaſi pars ingreditur, ab exemplis poſthac adjungendis res luculentius apparebit. Motus autem hoc modo componi poſſunt *Progreſſivi* cum *Progreſſivis*, *Progreſſivi* cum *Circumlatitiis*, *Circumlatitii* cum *Circumlatitiis*; componi poſſunt, inquam, et decomponi modis innumeris; quorum omnium cùm inire cenſum impoſſibile ſit, illoſque qui à regularitate deflectunt intelligere difficile ſit, exponere difficiliùs; nos præcipuos ſaltem aliquos, in uſu magis poſitos, et explicatu faciliores attingemus. Quales imprimis ſunt ii qui è motibus directis et parallelis; è directis et rotatitiis, è pluribus rotatitiis componuntur; præſertim illi quos qui conſtituunt ſimplices motus omnes vel nonnulli ſunt uniformes. Nam *uniformitatem nedum Reſpublica requirit, ac exigit Eccleſia, ſed artes etiam atque ſcientia vehementer affectant.* Recti motus (quibus parallelos à recta linea directos motus adnumero) primum ſibi non immeritò locum aſſerunt, ut ſimplicitate præcellentes, naturæ convenientes et chari, præ cæteris utiles ac uſitati. Nec ulla ſanè magnitudinis eſt ſpecies (nulla linea, nulla ſuperficies, nullum corpus) cujus generatio non è rectis peracta motibus concipiatur. Omnis, inquam, in uno plano conſtituta linea procreari poteſt è motu parallelo rectæ lineæ, et puncti in ea; omnis ſuperficies è motu parallelo plani, et lineæ in eo (lineæ ſcilicet alicujus è rectis modo jam inſinuato motibus progenitæ) conſequenter et linea quævis etiam in curva ſuperficie deſignata rectis motibus effici poteſt. Corpus autem ſolidum eodem modo genitum intelligatur, quatenus è ſuperficierum genitura reſultat, et quatenus ab ipſis ità genitis terminatur, ac circumſcribitur Sed quia *ſuperficierum plerarumque curvarum*, quales hactenus *Matheſis* excogitavit, & linearum in iis non in uno plano jacentium, generatio per alios modos commodiùs explicetur, neque mihi quicquam ſuccurrit animadverſione dignum quod de iis dicam, de linearum ſaltem in uno plano exiſtentium, per rectos et parallelos motus generatione diſpiciam. Et quidem has quod attinet, earum nulla eſt quæ non ex motu parallelo lineæ rectæ, punctique per eam delati producatur; verum hi motus eo contemperari modo debent, quem ſpecialis lineæ producendæ natura poſcit; nec refert qualem, velocitatis reſpectu, motum uni tribuas, ad hujus modo

diversitatem alterius diversitas ritè consequatur accommodeturque. Ut e. g. si recta Z A semper per rectam A Y sibi parallela feratur motu quolibet uniformi, vel difformi (crescente, vel decrescente vel alternante secundum velocitatem, juxta rationem quamvis imaginabilem) et in ea punctum aliquod M deferatur, ità tamen ut puncti motus lineæ rectæ motibus per singulas quasque temporis partes eâdem proportionentur, producetur utique linea recta. Nempe si fuerit semper A B. A C :: B M. C μ. vel A B, M X :: A M, X μ (positâ scilicet M X ad A C parallelâ) liquet puncta A, M μ in una recta versari. Est enim rectæ lineæ proprietas in Elemento VI. demonstrata, quòd ad eam parallelos applicatæ rectæ lineæ suis ad designatum in ea punctum distantiis proportionales in rectam lineam terminantur. Quòd si motus hi sic inter se contemperentur, ut assumptâ quâdam lineâ D habeat rectangulum ex differentia lineæ D, & ipsius B M (à puncto mobili decursæ in recta A Z) & ipsa B M ad quadratum ex A B (eodem tempore decursa à linea A Z) rationem semper eandem progignetur *ellipsis aut circulus*; circulus quidem si ratio proposita fuerit æqualitas, & angulus Z A Y rectus, *ellipsis* si secus, & in his erit D una *diametrorum*, situm habens in linea A Z primò posità, à vertice A porrecta versus partes Z. Sin ità se habeant, ut rectangulum ex summa linearum D, & B M & ipsa B M semper eandem cum quadrato ex A B proportionem servet, eo composito motu procreabitur *hyperbole*; quadrata quidem illa (vel æquilatera rectangula) si ratio designata fuerit æqualitatis, & angulus Z A Y rectus; sin aliter, alterius, pro rationis assignatæ quantitate, speciei; cujus *transversa diameter* æquabitur ipsi D, situm habens in Z A primò posita à vertice A protensa versus partes aversas ab Z; & parameter ex ratione data determinatur. Quòd si perpetuò rectangulum ex ipsa D, & decursa B M ad quadratum ex A B eandem perpetuò rationem obtinet, constabit effici *lineam parabolicam*, cujus *parameter* ex rectæ D, datæque rationis propositæ quantitate facilè definietur. Et in horum primo quidem casu si motus transversus per A Y ponatur uniformis, etiam motus descendens per A Z uniformis erit; in secundo & tertio si motus per A Y sit uniformis, erit motus descendens perpetuò crescens; eodemque posito quoad ultimum casum, in quo parabola fit; punctum M continuò velocitate crescet æqualiter. Nec absimili modo quævis alia linea tali motûs compositione producta concipi potest. Sed ut eò quo tendimus aliquando perveniamus; agedum videamus ecquid in *rem Mathematicam* utilitatis ex hujusmodi

Fig. 17.

modi ſuppoſita linearum generatione poterimus indipiſci. Simplicitatis autem & perſpicuitatis cauſâ ſupponamus alterum ex his motibus, rectæ nimirum parallelißmum ſervantis, eſſe ſemper uniformem, & quænam ex alterius quoad velocitatem generalibus differentiis generales emergant linearum productarum affectiones adnitamur elicere. Adnitamur inquam, at proxima lectione.

LECT. IV.

Propoſitum eſt nobis è compoſitione motuum (qualem proximè deſcripſimus) emergentes linearum affectiones indagare ac exponere. Quorſum imprimis methodi cauſâ repeto ſi recta A Z per rectam A Y ſibi perpetuo parallela feratur uniformiter, et in ea quoque punctum M uniformiter deportetur, quâvis velocitate, linea recta proveniet. Sumantur enim duæ quævis lineæ mobilis A Z poſitiones, ad B ſcilicet & C; & quia motus per A Y ponitur uniformis, erunt decurſa ſpatia A B, A C ad ſe, ut *Tempora*; ſed et ob motum uniformem puncti M etiam rectæ B M, C M ſe habebunt ut eadem tempora; eſt igitur A B. A C :: B M. C M. Unde liquet puncta A, M, M in una recta linea exiſtere. Parique ratione conſtat idem de punctis omnibuſcunque, quibus punctum M per totum ſuum curſum inſiſtit, aut coincidit. Supponatur ſecundò punctum M motu continuo increſcente deferri (juxta quamlibet velocitatis rationem, regulari modo quocunque nil intereſt, an irregulari) aio *ſuppoſitionem hanc conſectari progenitarum linearum quas apponemus proprietates generales* (quales uni tali linearum generi convenientes certè præſtat ex unimoda communi generatione ſimul univerſas elicere, quàm de ſingulis, ut paſſim fieri ſolet, ſingulas ſeparatim oſtendere.) Notetur intereà, quòd brevitatis cauſâ motum parallelum uniformem rectæ A Z per A Y appellabo ſubinde *motum tranſverſum*; puncti verò moventis ab A in linea A Z motum vocitabo *deſcenſum*, aut *motum deſcendentem*; habito ſcilicet ad figuram exhibitam reſpectu. Item quòd, ob motûs per A Y et ei parallelas uniformitatem, poſſit ea cum ipſius partibus motûs tempus, et ejus partes repræſentare. Jam ad dictas proprietates expendendas accedo.

Fig. 18.

Fig. 19.

I. Hoc

Fig. 19.

I. Hoc modo (per motum nempe transversum uniformem, & descensivum continuo crescentem) progenita linea per omnes sui partes curva evadet.|| Accipiantur enim in ipsa tria quælibet puncta M, N, O; per quæ transeant BZ, CZ, DZ ad AZ parallelæ, & per puncta M, N ducatur recta MNK. Et quia recta MN gignitur è motu composito transverso per BC (vel huic parallelam MG) & descendente per AZ, uniformi utroque; transversus autem per MG est prorsus idem cum transverso, quo linea proposita MNO describitur; patet velocitatem descendentis motûs uniformis rectam MN gignentis minorem esse velocitate, quam motus itidem descendens, lineam MNO describens, habet in N (etenim nisi motus hic velocior jam sit illo, cum continuò crescere ponatur, in toto tempore descensus per GN illo tardior fuisset, adeóque nunquam eodem tempore spatium æquale transegisset, nec una cum eo pertigisset ad punctum N) ergò motus hic inæqualis & increscens per tempus motûs uniformis CD continuatus (quo nempe gignitur linea NO) majus spatium emetitur, quàm uniformis motus descendens, quo MN, ad K protractus describitur, eodem tempore CD; (liquet enim eodem tempore à majore vi crescente majus spatium peragi, quàm à minore neutiquam crescente) quare linea HO major est quàm HK; adeóque tria puncta M, N, O non existunt in eadem recta linea; quod cùm tribus quibusvis lineæ MNO punctis conveniat, abunde patet eam esse nullibi rectam, sed per omnes sui partes incurvatam, & inflexam.

II. Hinc emergit *Corollarium*; velocitas motûs uniformis descendentis, quo curvæ MNO subtensa quævis (ut MN) describitur, existente scilicet communi transverso motu uniformi quo ipsa, ejúsque arcus fiunt, minor est velocitate, quàm motus descensivus increscens habet ad communem utriusque terminum N.

III. Hujusce curvæ *subtensa* quælibet (ut MO) intra *suum arcum* (versus partes AZ) tota cadit, & producta tota cadit extra lineam MNO.

Elem. III. 2. *Apoll.* I. *Seren.* I. 8.

Nam si sumatur in arcu MO punctum quodvis N, & connectantur rectæ MN, NO liquet totam MO intra rectas MN, NO jacere, & proinde intra curvam MNO. Tota verò, si producatur, extra lineam MNO cadit, quia nusquam alibi ei occurrit, uti mox ostensum.||

Hoc accidens de circulo speciatim demonstrat *Euclides*, *de sectionibus conicis Apollonius*; *de cylindricis Serenus*.

IV. Patet

IV. Patet curvam propoſitam eſſe convexam, aut concavam ad eaſdem partes (convexam verſus partes ſuperiores vel exteriores AY, concavam introrſum, aut deorſum verſus AZZ) nam hoc ipſum, fore convexum aut concavum ad eaſdem partes, nil omnino deſignat aliud, quàm à nulla recta linea præterquam duobus punctis ſecari, nec alio recidit, quam initio libri de ſphæra & cylindro tradit *Archimedes*, lineæ ad eaſdem partes cavæ definitio. Perſpicuum eſt v. g. ut linea MN duobus in punctis M, N curvam MNO ſecans ei rurſus occurrat, ut puta in K, debere curvam MNO reflecti, verſuſque partes AY recurvari; id quod modò demonſtratum eſt non poſſe contingere. Quapropter ipſa linea verſus eaſdem partes convexa eſt, ſeu concava.

V. Apertiſſimè conſtat lineas quaſvis rectas (ut BZ, CZ) genetrici AZ parallelas propoſitam curvam ſecare (modò contineantur intra terminos motûs per AY; quia curva per harum quamvis indefinitè promotam deſcripta cenſetur) addo quod harum quælibet curvam in uno tantùm puncto ſecat. || Id patet, quia recta genetrix AZ per unicum duntaxat inſtans temporis durat in ſitu quovis uno, ſeu BZ; ſimúlque pertingit ipſam BZ, ac deſerit; prætérque punctum unum M in BMZ reliqua cuncta lineæ curvæ puncta ſunt in parallelis ad BZ. Ergò liquidum eſt ipſam BZ in uno tantùm puncto curvam ſecare. || Hoc ipſum de parabola, & hiperbola ſpecium oſtendit *Apollonius*; de ſectionibus conoideon *Archimedes*. *Apoll.* I. 26. *Arch. de Conoid. & Sph.* 16.

VI. Non diſſimili modo patet ad AY parallelam quamvis, (qualis PG) unico puncto propoſitam curvam attingere. || Quòd ſemel occurret (modò contineatur intra limites deſcensûs per AZ) patet, quia punctum mobile continuò deſcendens, indefinito progreſſu, eam indefinitè protenſam aliquando trajiciet; nec in eo tamen præterquam ad unum temporis momentum perdurat. || Videatur hoc de ſectionibus conicis oſtendens *Apollonius*. I. 19.

VII. Patet omnes curvæ ſubtenſas rectas cum AZ & ei parallelis, ſi producantur, concurrere.

Quòd enim ſubtenſa quævis, ut MN, uni parallelarum alicui, ut BR, occurrit, ibi ſcilicet ubi ipſa curvam ſecat, exinde manifeſtiſſimum eſt, quòd tota curva per parallelum dictæ rectæ motum deſcribitur. Ergò, cùm uni occurrat, omnibus occurret; quæ enim uni parallelarum

larum æquidistat recta, pariter omnibus æquidistat, ut in elemento primo demonstratur.

Operæ pretium existimavit *Apollonius* hoc de *parabola*, & *hyperbola* speciatim demonstrare.

l. 22.

VIII. Simili modo patet rectas quascunque curvas tangentes una tantùm excipitur, ad extremum lineæ recurrentis. Vid. 18. hujus. Iisdem parallelis occurrere. || Etiam hoc, quoad *sectiones conicas*, uno vel altero *Theoremate* demonstravit *Apollonius*.

l. 24, 25.

IX. Quinimò rectæ quævis ipsam AZ secantes (infra punctum A, supráque limitem, siquis erit, motûs descensivi) curvam secabunt.

Cùm enim omnes ipsi AZ parallelas secent etiam infinitè productæ curvam secent oportet. *Hujusmodi Symptomatis demonstrationi in sectionibus conicis* laboriosam operam impendit *Apollonius*.

l. 27, 28.

X. Porrò liquet applicatas ad rectam AY, ipsi AZ parallelas (quas nempe propositæ curvæ sinus versos appellare fas erit, minorem inter se rationem habere (minores cum majoribus comparando, seu minores antecedentium loco ponendo) quàm habent respectivæ ipsius AY partes, iisdem temporibus decursæ (quas & curvæ propositæ sinus rectos appellare nil dubitem.) Nempe BM ad CN minorem rationem habet, quàm AB ad AC, vel BM ad CF; quia CN ⊏ CF. || Hoc de circulis, & aliis curvis speciatim reperiatur passim ostensum.

Ad sequentia notandum, quod si recta transversim & parallelos mota retrogradè (à D puta versus A per DA) moveri concipiatur, ab aliquo curvæ propositæ puncto, velut O, incipiens; eâdemque semper ratione dictum punctum ab O ascendens quoad velocitatem decrescat, quâ ad ipsum O descendens increverat, eadem curva producetur. Quidni? Cùm idem motus sit, inversè tantum consideratus.

XI. Supponatur rectam lineam TMS propositam curvam in puncto M tangere (sic ut eam nempe non secet) occurrátque tangens hæc rectæ AZ in T, ducatúrque per M recta PMG ad AY parallela; dico velocitatem puncti descendentis, eóque motu curvam describentis, quam habet ad contactum M, æquari velocitati, quâ recta TP describetur uniformiter eodem tempore, quo recta AZ fertur

per

per AC vel PM. (vel, quòd eodem recidit, dico quòd velocitas puncti deſcendentis in M ad velocitatem quâ fertur recta AZ ſe habet, ut recta TP ad PM.) Sumatur enim ubivis in tangente punctum aliquod K, & per ipſum ducatur recta KG, curvæ occurrens in O, parallelis autem AY, & PG in D, & G. Et quia tangens TM duplici concipiatur uniformi motu deſcripta, altero rectæ TZ per AC vel PM parallelas delatæ, altero puncti deſcendentis à T per TZ; & ſit horum motuum alter per AC, vel PM communis vel idem cum illo quo curva deſcribitur; cùm TZ eſt in ſitu KG, erit AZ in eodem; ergò cùm punctum à T deſcendens fuerit in K, erit punctum ab A deſcendens in curvæ cum KG interſectione O (nec enim, ut anteà deductum eſt, alibi recta KG curvam ſecat) eſt autem punctum O infra K quia tangens extra curvam tota verſatur. Jam ſi punctum K ponatur ſupra contactum verſus T, quoniam tum OG minor eſt quàm KG, liquet velocitatem puncti deſcendentis, quo curva deſcribitur, in curvæ puncto O minorem eſſe velocitate motûs uniformis deſcendentis, quâ tangens efficitur; quoniam illa ſemper increſcens eodem tempore (per GM repræſentato) minus ſpatium tranſigit, quàm hæc minimè creſcens; aſt eadem continuò perſeverans; illa ſcilicet rectam OG hæc rectam KG conficit. Contra vero ſi punctum K infra contactum ad partes S exiſtat, quoniam OG tum major eſt quàm KG, patet velocitatem puncti deſcendentis, quo curva fit, in puncto O majorem eſſe velocitate motûs uniformis itidem deſcendentis, quo tangens efficitur; quia motus iſte, continuò decreſcens eodem per GM tempore, majus peragit ſpatium OG, quàm hic minimè decreſcens, at in eodem tenore perſiſtens, conficit, ipſum nempe ſpatium KG. Ergò cùm velocitas curvam deſcribentis puncti quovis in curvæ puncto ſupra contactum verſus A minor ſit velocitate motûs per TP; quovis autem in puncto infra contactum eâdem major; liquet in ipſo contactu M ei penitus exæquari. Q.E.D. Fig. 20.

XII Hujus converſa, conſimili diſcurſu, rem breviùs exponendo, demonſtretur. Nempe, ſi velocitas puncti deſcendentis ab A in aliquo curvæ puncto M æquetur velocitati, quâ punctum T uniformiter latum, rectam TP deſcriberet tempore PM vel AC (vel ſit velocitas motûs deſcendentis ad M ad velocitatem motûs tranſverſi, ut TP ad PM) recta TMS curvam AMO tanget ad M.

Nam ſumpto quovis in recta TS puncto K, & ductâ KG ad AZ parallelâ; quoniam verſus partes AT velocitas aſcendentis puncti, curvam efficientis, ſemper decreſcit ab M ad O, illi verò ex hypotheſi par velocitas puncti rectam MT gignentis haud decreſcit ab M ad K, ſitque tempus MG commune, erit ſpatium GO minus quàm GK; unde punctum K erit extra curvam. Item, quia verſus alteras partes, velocitas deſcendentis, quo curva fit, increſcit ſemper ab M verſus O; æqualis autem ei velocitas, quâ recta MS fit, haud creſcit ab M ad K; idémque ſit rurſus tempus MG, liquet rectam GO excedere rectam GK; & idcirco punctum K ſupra curvam exiſtere. Quare manifeſtum eſt omnia dictæ rectæ puncta extra curvam exiſtere; & eam proinde curvam contingere: Q.E.D.

XIII. Ex hiſce ſtatim *conſectatur*, *hujuſmodi curvas ad unum punctum ab una tantùm recta contingi.*

Nam tangere ponatur recta MT curvam AMO ad M; & ſi fieri poteſt altera MX etiam tangat. Ergò eodem tempore, eâdem velocitate (illâ ſcilicet, quæ puncti curvam deſcribentis ad contactum M acquiſitæ velocitati æquatur) deſcribetur utraque recta XP, TM; quare XP, TP æquales erunt, totum & pars: Q.E.A. Ergò non tanget altera præter poſitam MT. || *Hanc ſpeciatim de circulo demonſtravit Euclides; de Sectionibus Conicis Apollonius*, de lineis aliis alii. Exhinc *Lucrum* emergit haud aſpernandum, quòd eâdem operâ *propoſitiones de tangentibus inverſa demonſtrantur.* Nempe ſi determinetur angulus PMT (vel alter quiſpiam quem recta poſitione data cum tangente facit ad punctum curvæ deſignatum) aut ſi determinetur quantitas rectæ PT (vel ſimilis cujuſpiam alterius à puncto in data poſitione recta deſignato per tangentem interceptæ) eo tangens determinabitur. Et permutatim, ſi tangens ſitu determinetur, angulorum atque linearum ejuſmodi quantitas indè dignoſcetur. Adeóque parcetur operæ, qualem inſumpſerunt plerique tales propoſitiones inverſas demonſtrandi. Quod & eo magis obſervatu dignum eſt, quia ſæpe talium inverſarum propoſitionum una quàm altera longè promptiùs invenitur, atque facilius demonſtratur. Cujus obſervationis, niſi longiùs evagari nollem, in promptu forent *Specimina.*

Euclid. III. 16, 17. *Apoll.* I. 32, 33, 34, 35, 36.

XIV. E dictis infertur puncti deſcendentis velocitates in duobus quibuſvis deſignatis curvæ punctis ad ſe proportionem habere reciprocè com-

compoſitam è rationibus applicatarum ab iſtis punctis ad rectam AZ (ipſi ſcilicet AY parallelarum) & interceptarum à tangentibus ad iſta puncta ac dictis applicatis (vel, rationem velocitatum æquari rationi applicatarum ex interceptarum ratione ſubductæ.)

Nempe ſi duæ rectæ MT, NX curvam tangent ad puncta M, N; protractæ ZA occurrentes in T, X; & applicentur NP, NQ ad YA parallelæ, velocitatum ad puncta, M, N proportio componetur è proportione ipſius TP ad PM, & ipſius QN ad QX. Nam velocitas in M ad velocitatem uniformem per AY ſe habet ut TP ad PM; & velocitas iſta uniformis ſe habet ad velocitatem in N, ut QN ad QX. Ergo velocitas in M ad velocitatem in N ex his duabus rationibus PP ad PM, & QN ad QX componetur Notetur à concurſu tangentium ductâ FE ad AY parallelâ; fore TE, XE = TP. PM + QN. QX. Fig. 21.

XV. Obiter interjicio generalem hinc & bene facilem conſequi *Problematis iſtius ſolutionem*, quam tanti fecit, & cui tantum laborem impendit *Galilæus*, quámque *Torricellius* pronunciat eum quàm optimè & ingenioſiſſimè reperiſſe. Rem ità proponit *Torricellius* (nam ipſe *Galilæus* ad manum non eſt) propoſitâ quâvis *parabolâ*, cujus *vertex* A oportet punctum aliquod ſublime reperire; è quo ſi grave cadat uſque ad A, & ex puncto cum impetu jam concepto horizontaliter convertatur, ipſa *propoſitam parabolam* deſcribat (notetur, quod motus deſcenſivus parabolam deſcribens non è puncto ſublimi, ſed ab ipſo puncto A cenſetur inchoare.) Huc recidit *Problema*, *Galilæi* ſuppoſitis inſiſtendo, ut determinentur particulares velocitates motuum, uniformis horizontalis, ſeu tranſverſi, & æqualiter creſcentis deſcenſivi quorum è compoſitione deſcripta concipitur exhibita parabola. Nos illud, quæcunque ſit creſcentis deſcenſivi motûs ratio, quicunque modus, generaliter exequemur; ſpecialem illum de *parabola* caſum in exemplum ſubjuncturi. || Reperiatur in recta AZ (quæ ſanè curvæ diameter eſt) punctum aliquod, ut P, à quo ſi ordinatim applicetur PM, & ducatur tangens MT, rectæ AZ occurrens in T, ſit intercepta TP æqualis ipſi PM; tum ſumatur in ZA protractâ recta AS = AP. Dico factum. Fig. 22.

Nam quoniam SA = AP, concipiet mobile deſcendens ab S in A tantum impetum, quantum ab A ad P curvam deſcribendo (ponitur enim increſcentis velocitatis motus utrobique prorſus idem) iſte verò impetus æquatur impetui, quo mobile à T deſcendens uniformi motu percurret rectam TP, eodem tempore quo recta AZ uniformiter

lata, perque motum iſtum in curva deſcribenda conſpirans, percurrit rectam PM. Cùm igitur ſint TP, PM ex conſtructione pares, adeóque velocitates motuum, quibus ſimul peraguntur, æquales; etiam motus deſcenſivus in P, vel M æquabitur motui tranſverſo, curvam deſcribenti, hoc eſt motus ab S ad A velocitas in A eidem æquatur. Ergo punctum S eſt id ipſum, quod inveniri debuit, & abſolutum eſt propoſitum. | Exemplo ſit *parabola*, quæ facta concipitur ex motu uniformi horizontali, & deſcenſivo pariter accelerato; tum punctum P ita facilè per *Analyſin* inveſtigatur. Sit recta R *data parabolæ rectum latus*. Eſt igitur ex *parabolæ* natura, $R \times AP = PMq = TPq$ (ex hypotheſi modi noſtri generalis.) Item, ex parabolæ nota proprietate eſt $TPq = 4APq$. Ergo eſt $R \times AP = 4APq$. Adeóque $R = 4AP$; vel $\frac{1}{4}R = AP = SA$. Nimirum ita *Galilæus* determinavit. In hoc autem caſu puncta T, S coincidunt. Quòd ſi rurſus gravia juxta *triplicatam temporum rationem* velocitate creſcendo deſcendant, adeóque motus ipſorum talis cum uniformi tranſverſo compoſitus *parabolam cubicam* deſcribat, & ſit R iſtius curvæ *parameter*, erit eo in caſu $SA = \sqrt{\frac{Rq}{27}}$ nam ex hujuſce curvæ proprietate eſt $Rq\,AP = PM$ cub. Et ex hujus regulæ generalis præſcripto eſt $PM = TP$, adeóque PM cub. $= TP$ cub. Denique quoniam in hujuſmodi *parabola* tangentis intercepta ſemper triſecatur à vertice (nimirum ut ſit $AP = \frac{1}{3}TP$) eſt TP cub. $= 27\,AP$ cub. Erit igitur $Rq\,AP = 27\,AP$ cub. Adeóque $Rq = 27\,APq$; vel $\frac{Rq}{27} = APq = SAq$. In reliquis ſimili ratione procedentes aſſequemur propoſitum. Poſſent opinor & hinc nedum pleræque *Galilæi propoſitiones* huic affines, & hanc attingentes materiam utcunque deduci, ſed & generaliores reddi, vel ad alia curvas omnigenas extendi. Verùm parco pluribus, hoc *ſpecimine* (quoad iſta) contentus; huc non niſi per tranſcurſum adducto. Ad alia pergo prædictis cohærentia.

Fig. 22.

XVI. Si ad rectam lineam applicetur *plana ſuperficies*, cujus ſingulæ quæque partes applicatis ad iſtam rectam parallelis intercepte proportionales ſint rectis ad rectam AY ſimpliciter diviſam applicatis (ad AZ nempe parallelis.) Hujuſce ſuperficiei ad parallelogrammum æquealtum, ſuper eadem baſe conſtitutum, proportio proportionem indicabit ipſarum AP; TP, à puncto P vertici, tangentique interjectarum.

Ut

Ut ſi ad rectam $\alpha\delta$ applicetur plana ſuperficies $\alpha\delta\mu$, & utcunque divisâ AD punctis B, C, ſimilitérque dicisâ rectâ $\alpha\delta$ punctis ζ, γ, fuerit ut BM ad CM ità ſuperficies $\zeta\alpha\mu$, ad ſuperficiem $\gamma\alpha\mu$, & hoc in comparationibus univerſis taliter inſtitutis contingat; *completo parallelogrammo* $\alpha\delta\mu\varphi$, *ſe habebit recta* AP *ad rectam* TP *ut ſuperficies* $\alpha\delta\mu$ *adi parallelogrammum* $\alpha\delta\mu\varphi$. Et enim ſi recta $\alpha\delta$ commune tempus deſignare concipiatur, quo recta AD motu æquabili, rectáque DM motu continuè accelerato tranſiguntur, recta $\delta\mu$ bene deſignabit velocitatem hujus definiti temporis maximam, quam habet punctum deſcendens in curvæ puncto M infimo; hoc eſt velocitatem quâ recta TP uniformiter decurritur eodem tempore; quapropter (ut antehac commonſtratum eſt) *Parallelogrammum* $\alpha\delta\mu\varphi$ optimè *Spatium* repræſentabit, quod hâc eâdem permanente velocitate per totum tempus $\alpha\delta$ uniformiter deſcribitur, hoc eſt ipſam rectam TP. Cum igitur, ex hypotheſis præſtratæ conditione, figura $\delta\alpha\mu$ rectam DM, vel AP, repræſentet, erit ut figura $\delta\alpha\mu$ ad parallelogrammum $\alpha\delta\mu\varphi$, ità AP ad TP; cognitaque proinde modo quovis iſtâ proportione, ſimul hæc innoteſcet; & reciprocè. Exemplo res manifeſtior evadet uno, vel altero. Propoſita curva ſit *parabola quadratica*, ſeu in qua rectæ BM, CM ſe habent, ut quadrata ex AB, AC, hoc eſt ut quadrata ex $\alpha\zeta$, $\alpha\gamma$. Ergò ſi figura $\alpha\delta\mu$ ſit triangulum, id optimè quadrabit huic negotio. Nam eo ſuppoſito ſemper triangula $\zeta\alpha\mu$, $\gamma\alpha\mu$ proportionalia erunt quadratis ex $\alpha\zeta$, $\alpha\gamma$, hoc eſt rectis BM; CM. Quoniam verò triangulum $\delta\alpha\mu$ parallelogrammi $\delta\alpha\varphi\mu$ eſt ſubduplum, erit recta AP quoque rectæ TP ſubdupla; quod ità ſe habere demonſtratum habetur in *conicis elementis*, & paſſim agnoſcitur. Sit rurſus curva AMM *parabola cubica*; & quoniam in ea rectæ BM, CM ſe habent ut cubi rectarum AB, AC, hoc eſt ut cubi rectarum $\alpha\zeta$, $\alpha\gamma$; & ſi *ſuperficies* $\alpha\delta\mu$ *fuerit complementum ſemiparabolicæ quadraticæ portionis, trilinea* $\alpha\zeta\mu$, $\alpha\gamma\mu$ *cubis ex* $\alpha\zeta$, $\alpha\gamma$ *proportionalia erunt* (ut à *Pappo*, ac aliis oſtenditur, & ex *Archimidea parabolæ dimenſione* quàm facillimè deducitur) itaque negotio propoſito quàm rectiſſimè adaptetur *parabola quadratica*; cumque conſtiterit aliundè tum figuram $\alpha\delta\mu$ ſubtriplam fore parallelogrammi $\alpha\delta\mu\varphi$; erit etiam juxta regulæ jam aſſignatæ præſcriptum recta AP quoque ſubtripla rectæ TP. De qua concluſione ſatis convenit inter *Geometras*.

Fig. 23, 24. *Hæc poſtbac* παναρτιχειρότερον *demonſtrata habentur.*

XVII.

XVII. Huic ſuppar modus dictas rectas AP, TP comparandi tali *Theoremate* continetur: Si ad rectam aliquam lineam (hoc eſt ad ejus ſingula quæque puncta) applicentur rectæ lineæ parallelæ, ad rectam AD conſimiliter diviſam applicatarum differentiis proportionales, reſultantis hinc plani ad parallelogrammum æque altum, ad eandemque baſin poſitum, rectarum AP, TP proportionem exhibebit. Ut ſi rectæ AD, $\alpha\delta$ ſimiliter (in partes ſcilicet æquales indefinitè multas) dividantur; & rectæ $\zeta\mu$, $\gamma\mu$, $\delta\mu$ rectis BM, NM, OM (quæ differentiæ ſunt rectarum ad AD applicatarum, incipiendo à puncto A) proportionales ſint, erit ut figura $\alpha\delta\mu$ ad parallelogrammum $\alpha\delta\mu\varphi$, ità AP ad TP. Cùm enim recta quæpiam ex applicatis ad AD; puta *v. g.* DM æquetur omnibus ſeipsâ minorum differentiis (ipſis nempe BM, NM, OM) & trilineum $\alpha\delta\mu$ conſtituatur è rectis $\zeta\mu$, $\gamma\mu$, $\delta\mu$ eâdem proportione creſcentibus; ut & recta CM æquatur ipſis BM, NM; & ei reſpondens trilineum $\alpha\gamma\mu$ quaſi conflatur è parallelis $\zeta\mu$, $\gamma\mu$ pari ratione creſcentibus; & hoc ſemper eveniat; omnino patet trilinea $\alpha\delta\mu$, $\alpha\gamma\mu$, $\alpha\zeta\mu$ rectis DM, CM, BM proportionari; proindeque modum hunc in priorem recidere; nec ab eo reipsâ differre. Notetur autem hic rectas $\zeta\mu$, $\gamma\mu$, $\delta\mu$ velocitates repræſentare, quas punctum mobile curvam delineans obtinet in reſpectivis ejus punctis M; ut & trilinea $\alpha\zeta\mu$, $\alpha\gamma\mu$, $\alpha\delta\mu$ velocitates aggregatas exhibent ab initio ad definita reſpectiva temporis inſtantia; quibus (ut jam olim præmonitum) reſpondentia ſpatia BM, CM, DM proportionantur.

Fig. 23, 24.

XVIII. E ſupradictis porrò conſectatur, quòd ſi *Circulus*, *Ellipſis*, ejuſmodique curvæ recurrentes hoc progenitæ concipiantur modo, punctum eas deſcribens infinitam in recurſûs puncto velocitatem habebit. Nempe ſi quadrans AFM ità generetur; quoniam tangens TM diametro AZ eſt parallela, nec illa proinde cum hac niſi ad infinitam diſtantiam convenit; ergò velocitas in M ad velocitatem uniformis motûs per AY ſe habebit, ut infinita recta ad ipſam PM; unde velocitas iſta ad M prorſus infinita ſit oportet Ità quidem quoad hujuſmodi curvas; at quoad alias ad infinitum ſenſim continuatas (quales *parabola* & *hyperbola*) deſcendentis puncti velocitas in quovis deſignato curvæ puncto finita eſt. Verùm his omiſſis ad alias propoſitæ curvæ proprietates exponendas progrediamur.

Fig. 25.

II. *precd.*

LECT. V.

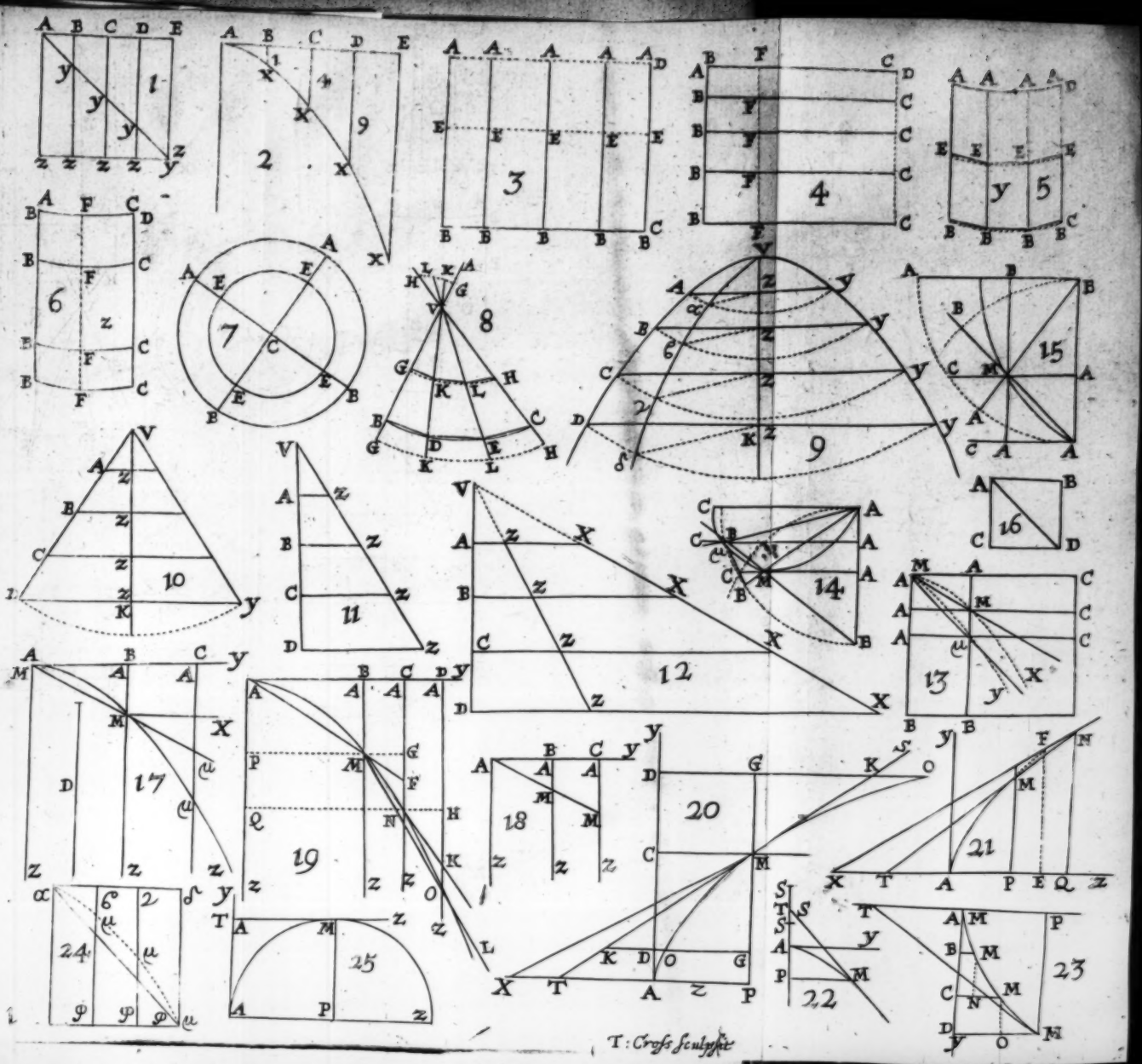

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
T: Cross sculpsit

Fig. 23, 24.

Fig. 25.

II. *preced.*

Lect. V.

IN deducendis è propoſitâ generatione curvarum affectionibus etiamnum progredimur.

I. *Anguli, qui fiunt ab applicatis & tangentibus ad diverſa curvæ puncta, ſibimet inæquales ſunt; & minores ſunt illi qui puncto A (ſeu vertici) propiores ſunt.*

Tangant rectæ TM, XN; & ad AY parallelæ ſint MP, NQ; dico fore angulum PMT minorem angulo QNX.

Nam producta recta TM occurret ipſi QN extra curvam protractæ, puta ad E. Item ipſa XN ſecabit applicatam PM extra curvam, puta ad H. Manifeſtum eſt autem cùm puncta H, N ſint ad alias, ac alias partes rectæ ME, rectas ME, NH ſeſe interſecare inter parallelas PH, QE; quare major eſt angulus externus QNX interno QET, hoc eſt angulo PMT: Q.E.D. Fig. 26.

II. Hinc *poriſmatis* loco habetur *tangentes ſe interſecare inter ordinatim applicatas per puncta contactuum; velut ad F, inter PM, QN protenſas.*

III. Item *angulum PTM angulo QXN majorem eſſe*; (externum ſcilicet interno.)

IV. Item patet vertici propiores applicatas (proindéque rectas quaſvis aliis parallelas) curvæ obliquiùs incidere quam remotiores.

Cæterùm iſta jam olim de *Sectionibus Conicis* oſtenderat *Apollonius*, ut in edito nuper VI *conicorum libro* eſt videre

V. In figura præcedente (poſito applicationis angulum TAY rectum eſſe, vel obtuſum) *dico curvæ arcum MN rectâ NH, majorem eſſe; rectâ verò ME minorem.*

Nam

Nam connectatur ſubtenſa MN, ducatúrque recta NR ad ZA parallela. Et quoniam angulus XPH non minor eſt recto, erit, eo major externus, NHP obtuſus. Ergò recta NM major eſt quàm NH. Itaque magis arcus, arcus NH major eſt quàm ipſâ NH: Q.E.D.

Item, quoniam ang. RNE ipſi XQE par haud minor eſt recto, erit RE ⊏ RN. quare MR + RE ⊏ MR + RN: hoc eſt ME ⊏ MR + RN. Eſt autem (ex *Archimedis* aſſumptis) MR + RN ⊏ arc. MN. ergò magis eſt ME ⊏ arc. MN.

VI. Perutilis eſt hæc propoſitio in *tangentium demonſtrationibus expediendis*. Etenim hinc conſectatur, ſi arcus MN indefinitè parvus ponatur, ejuſce loco alterutram tangentis particulam ME, vel NH tutò ſubſtitui.

Speciminis hîc loco *methodum proponam generalem cycloidum omnium, & conſimili modo deſcriptarum curvarum tangentes determinandi*, hinc petitâ demonſtratione munitam.

Fig. 27. Recta AY ſibi parallelè deportata quamcunque curvam ad eaſdem partes convexam aut cavam, APX perambulet uniformi motu (ſcilicet ut æquales curvæ partes æqualibus tranſigat temporibus) eodémque ſimul tempore punctum aliquod ab A per AY etiam uniformiter feratur; ab hoc puncto taliter moto progignetur curva AMZ, cujus ad datum quodcunque punctum M tangentem oportet determinare. Ut hoc fiat, ducatur recta MP ad AY parallela, curvam APX ſecans in P; pérque P ducatur recta PE curvam APX contingens; huic verò per M ducatur parallela MH; ínque hac ſumatur punctum quodpiam R, & ducatur RS ad PM parallela; tum fiat ut curva AP ad rectam PM (hoc eſt ut unus motus uniformis ad alterum) ità MR ad RS; & connectatur MS. hæc curvam AMZ continget. Sumatur enim in hac curva punctum quodvis Z, per quod ducatur recta ZX ad MP parallela, ſecans curvam APX in X, ejúſque tangentem in E; & huic parallelam MR in H; ipsámque demùm MS in K. Sit autem primò punctum Z ſupra M verſus A; unde recta PE ⊐ arc PX. adeóque PA. PE ⊏ arc PA. PX :: PM. PM — XZ :: PM. EH — XZ :: PM. ZH — EX ⊏ PM. ZH. quare permutatim erit PA. PM ⊏ PE. ZH. eſt autem PA. PM :: MR. RS :: MH : KH :: PE. HK. ergo PE. HK. ⊏ PE. ZH. quare HK ⊐ ZH. eſt autem punctum H extra curvam AZM; ob EZ ⊐ XZ ⊐ PM — EH. ergo palàm eſt punctum K extra curvam AZM exiſtere. Sit verò ſecundo

punctum

punctum Z infra punctum M, erit tum recta PE major arcu PX; unde arc PA. PE ⊐ arc PA. PX :: PM. XZ — PM : PM. XZ — EH :: PM. XE + XZ ⊐ PM. HZ. & viciſſim PA. PM ⊐ PE. HZ. Verum ut priùs) eſt PA. PM :: PE. HK. ergò PE. HK ⊐ PE. HZ; propterea que HK ⊏ HZ; rurſus itaque liquet Punctum K extra curvam exiſtere. Tota proinde recta M K Z extra curvam verſatur; & eam tangit ad M: Q. E. D. In tranſcurſu hoc. ad alias curvæ noſtræ paſſiones revertamur. Fig. 27.

VII. Si tangenti cuipiam (ut ipſi M T) parallela ducatur quæpiam E F (à puncto nempe quopiam E in recta infra punctum T ſumpto) hæc curvæ occurret.

Si enim infra punctum M in curva ſumatur punctum quodlibet, & ab eo duci concipiatur curvam tangens recta; huic occurret tangens TM infra ordinatam PM. ergò recta E F eidem occurret; at curvam priùs tranſiliat oportet. ergò liquet Propoſitum. Fig. 28.

VIII. Eâdem operâ patet, ſi punctum aſſumptum E puncto T, & vertici A interjiciatur, rectum E F curvæ bis occurſuram, tam ſupra quàm infra contactum M.

Operosè conniſus eſt *Apollonius* hæc de *Sectionibus Conicis* oſtendere. *Con. l.* 27, 28.

Cæterùm ad penitus determinandos occurſuum locos *Specialis modus ſeu ratio motuum deſcendentis atq; tranſverſi cognoſci debet*; tunc eos *Analyſis* ſtatim prodet.

IX. Si duæ rectæ quævis (H M, K N) ad curvam propoſitam æqualiter inclinentur (hoc eſt æquales cum ejus ad occurſus tangentibus (puta cum ipſis M T, N X) angulos efficiant) hæ extrorſum divergent, ſeu ad partes E F productæ concurrent. Fig. 29.

Nam ducatur ſubtenſa N M; hæc utiq; ſecundum antedicta cum ipſa A Z conveniet, puta ad O. Eſt ergò ang O M H ⊐ (ang. T M H = ang. X N K ⊐) ang. O N K. ergo ang. H M N + M N K ⊏ 2 rect. ergò rectæ H M, K N concurrunt ad partes E F. Limitandum eſt hoc, intelligendo pares angulos H M A, K N A ad eaſdem partes veſari; ſeu alterum alteri fore externum interno. alias contrà eveniet.

X. Si fuerit recta H M *curvæ* perpendicularis (hoc ejus tangenti M T) & in hac ſumatur quæpiam definita H M; erit H M minima rectarum omnium, quæ à puncto H duci poſſunt ad curvam. Fig. 30. *Apoll. V.* 38 &c.

Ducatur enim quævis HO; hæc tangenti priùs occurret, puta ad R. liquet HR majorem esse quàm HM; multóq; magis esse HO ⊏ HM.

XI. Hinc *Circulus Centro* H per M descriptus *curvam* continget.

XII. Etiam inversè, si HM minima sit omnium quæ ab H ad curvam duci possunt, erit HM curvæ perpendicularis.

Nam quoniam HM minima ponitur, circulus centro H, intervallo quovis HS, majori quàm HM, curvam secabit, & proinde tangentem MT, hanc puta in R. ergò quum sit HR ⊏ HM, non erit angulus HRM rectus. idem de punctis omnibus in recta TM evidens est. ergò tangenti perpendicularis non alibi quam in punctum M cadit.

Fig. 31. XIII. Quinetiam si recta HM minima sit omnium quæ ab H duci possunt, eiq; perpendicularis sit recta TM; hæc curvam tanget.

Nam tangat alia, (si fieri potest) XM; erit igitur XM ad HM perpendicularis. Unde pares erunt anguli HMX, HMT, totum & pars. Q. E. A.

Fig. 32. XIV. Dico porrò minimæ HM propiorem HN remotiore HO minorem esse.

Nam ducatur subtensa MN; hæc producta curvam transgredietur, & ipsam HO secabit, puta in R. & quoniam Angulus HMR obtusus est (major illo nempe, quem tangens cum HM constituit ad M) erit HNR magis obtusus, adeóq; recta HR ⊏ HN & magis HO ⊏ HN.

XV. Hinc perspicuum est Circulum quemvis Centro H descriptum, uno tantùm ad eandem puncti M partes puncto curvæ occurrere; nec omnino pluries igitur, quàm in duobus punctis.

Fig. 33. XVI. Perpendiculari HM parallelæ sint rectæ IN, KO; harum propior IN remotiore KO rectiùs incidet.

Nam per N, O ducantur ipsi curvæ perpendiculares EN, FO; hæ cum ipsa HM intra curvam convenient, puta ad R, & P; sibi verò ipsis in Q.

Liquet jam esse ang. FOK = ang. FPH ⊏ ang. PRQ = ang. NRH = ang. ENJ. Cùm ergò sit ang. FOK major angulo ENJ, liquet propositum. XXXVII.

XVII. Si à puncto quopiam H in perpendiculari H M assumptò ducantur ad curvam rectæ H N, H O; harum propior H N, remotiore H O rectius incidet.

Nam ducantur E N, F O curvæ perpendiculares, & I N, K O ad ipsam H M parallelæ. Est igitur ang. F O K ⊏ ang. E N I. Item ang. O H M ⊏ ang. N H M. hoc est ang. K O H ⊏ ang. I N H. quare ang. F O K + K O H ⊏ ang E N I + I N H. hoc est ang. F O H ⊏ ang. E N H. Unde constat Propositum. Fig. 34.

XVIII. Hinc patet à perpendiculari progrediendo, (ab uno nempe puncto H) incidentium *obliquitatem* crescere, donec ad illam devenitur, quæ *curvam* tangit, omnium obliquissima.

XIX. Porrò si introrsum jam sumatur punctum H, & ab eo incidens H M sit omnium curvæ incidentium minima; erit H M *curvæ* perpendicularis, seu tangenti M T. Fig. 35.

Nam dic aliam M R tangenti perpendicularem esse. ergò H R ▭ H M. & magis H O ▭ H M. quare H M non est minima contra *Hypothesin*. *Apoll. V.* 32.

XX. Item si recta HM sit omnium ab H curvæ incidentium *maxima*, erit H M curvæ perpendicularis. *Apoll. V.* 29.

Nam Circulus Centro H per M descriptus extra curvam totus cadet. ergò si recta M T Circulum tangat, hæc magis extra curvam cadet, eamq; proinde continget. Est autem ang. H M T rectus. ergò liquet. Fig. 36.

XXI. Hinc si M T sit minimæ vel maximæ H M perpendicularis; hæc *curvam* tanget. *Apoll. V.* 30, 39.

Nam si dicatur alia M X tangere; erit ideò ang. X M H rectus, & par angulo T M H: Q. E. A.

XXII. Exhinc si recta Y M non sit curvæ perpendicularis; in ea nulla sumi potest *maxima*, vel *minima*.

Nam si sumi posset, esset ex eo ipso Y M curvæ perpendicularis contra *Hypothesin*. *Apoll. V.* 31, 47.

XXIII. Si H M sit incidentium minima, & intra ipsam sumatur punctum quodpiam I; erit etiam I M minima. *Apoll. V.* 30.

Fig. 37. Cùm enim *circulus centro* H per M descriptus *curvam* introrsum tangat, etiam magis *circulus centro* I *descriptus* introrsum tangat. unde liquet,

XXIV. Etiam si HM sit incidentium maxima, & extra ipsam accipiatur punctum quodpiam I, erit IM maxima.

Cùm enim *Circulus Centro* H *per* M *descriptus curvam* extrorsum
Apoll. V. 39. contingat, etiam potiori jure *Circulus Centro* I *per* M *descriptus eandem extrorsus continget.* unde constat *Propositum.*

Cæterùm *minimarum & maximarum propior determinatio pendet ex speciali curvæ natura.*

De hac autem Tabula jam manum auferemus; nec enim impræsentiarum hujusmodi pleraq; complecti profitemur. Instituto nostro sufficit hactenus generalis cujusdam curvarum proprietates comprehendentis Doctrinæ *specimen* exhibuisse: qualis certè, plenior & perfectior, *haud exiguum videtur rebus Geometricis* (quæ nempe circa *curvarum proprietates & affectiones* plurimùm occupantur) *compendium allaturæ.* Nè dicam culpæ agnatum videri, *Logicæq;* Regulis haud admodum congruere, quæ toti cuipiam generi conveniunt, & quæ de communi quadam origine manant, ea quibusdam partibus adscribere, vel ex angustiori fonte derivare. *Plura* forsan, & *abstrusiora* proferemus aliquando. Nunc his supersedemus.

LECT. VI.

LECT. VI.

AD eaſdem partes vergentium curvarum, è communi quadam generatione deductas, generales aliquot affectiones jam antea dudum expoſui; illas præſertim, quas à veteribus *Geometris* obſervaram ſpecialibus, quas ipſi tractant, curvis applicari. Jam non ingratum facturus videor, ſi complures alias (abſtruſiores quidem illas, at non injucundas prorſus, aut inutiles) appoſuero, pro meo more quàm conciſiſſimè demonſtratas, eâ tamen ratione quoad potero, quæ cumprimis ſcientifica videtur, hoc eſt quæ nedum concluſionum veritatem aſſerit, at fontes etiam aperit, unde illa promanat. Verſantur autem præcipuè quæ proferemus, partim *circa tangentium abſque calculi moleſtia vel faſtidio inveſtigationem ſimul ac demonſtrationem expeditam* (è ſimplicioribus nempe vulgatioribúſque perplexiora minúsque perſpecta deducendo) *partim circa multarum magnitudinum dimenſiones, tangentium deſignatarum ope, quam promptiſſimè determinandas*; quæ materiæ cùm præ Geometricis aliis quodammodò difficiles videntur, tum non penitus adhuc (ſicut aliæ quædam) occupatæ vel exhauſtæ ſunt, ad hunc ſaltem modum quod ſciam nondum tractatæ. Quin è veſtigiorem aggredimur, *Lemmatica* quædam utcunque, quorum in reliquis clarius & breviùs oſtendendis aliquem proſpicimus uſum, prælibantes.

II. Sit *angulus rectilineus* A B C, & datum punctum D, ſit item linea O D O talis, ut per D ductâ quâvis rectâ D N, ſit anguli lateribus intercepta M N æqualis à puncto D, & linea O D O interceptæ D O; erit linea O D O *Hyperbola*. Fig. 38.

Nam ducatur D L ad C B parallela occurrénſq; ipſi A B in L; & in protracta B L ſumatur L Z = L B; ducatúrq; Z S ad B C parallela; item ducatur O K ad B Z parallela. Et ob poſitam D O = M N; erit H O = B N; ergò quum ſit D H. H O :: (D L. L N :: D L — D H.

DH.LN—HO::LH.LB::) LH.HK. erit DH × HK = HO × LH; hoc est DL × HK — LH × HK = KO × LH—HK × LH. unde erit DL × HK = KO × LH. vel ZL × LD = ZK × KO. ergò constat lineam ODO esse *Hyperbolen*, cujus *Asymptoti* ZA, ZS. Breviùs hoc ostendi posset, producendo rectam ND S. Nam est DS = DM = DO ± OM = NM ± OM = ON. Similiter quartam & nonam breviùs demonstres licet.

Fig. 38. Quinimò si MN ad DO quamvis eandem perpetuò rationem ponatur habere (puta datam R ad S) etiam linea ODO *Hyperbola* erit; Nempe si tum fiat R.S::LB.LZ; & R.S::DL.DE; & per Z ducatur ZS ad BC; ac per E transeat RE ad ZA parallela, cum ZS conveniens in Y; erunt YR, YS dictæ *Hyperbolæ asymptoti* quod jam sufficerit innuisse.

Hinc in transcursu noto facilè confici *Problema (quo problematum conflictiones ista Archimedea, ac Vietæ ope primæ Conchoidis peracta, ad Sectiones conicas redigantur)* Per datum punctum D rectam lineam ducere, sic ut anguli dati ABC lateribus intercepta ductæ rectæ pars æquetur datæ T. Nam descriptâ hyperbolâ ODO; centro D, intervallo datam T æquante describatur circulus POQ *hyperbolam* intersecans in O; & producatur DON; fiétq; MN = DO = T. Modus autem hic generalior est, & concinnior eo, quem in *Opticis* tradidimus.

Fig. 39. IV. Sit angulus ABC, et punctum datum D; sit etiam linea OBO talis, ut per D ductâ quâpiam rectâ DN, sit anguli lateribus intercepta MN ad rectâ BC curvâque OBO interceptam MO in eadem semper ratione (puta X ad Y;) erit linea OBO *hyperbola*.

Fig. 39. Ducatur enim recta DL ad CB parallela, ipsi AB occurrens in L; secentúrque DL, BL punctis E, F, ut sit DL. DE::X. Y::BL.BF; tum per E ducatur recta ER, ad BA; & per F recta FS ad BC parallela; concurrántque rectæ ER, FS puncto Z; denuò per punctum O ducatur OH ad AB parallela. Jam ob DL.DH::LN.HO::LB + BN.HO::DE × LB + DE × BN.DE × HO. item DL × KO = DE × BN (nam DL.DE::MN.MO::BN.KO) & DE × LB = DL × BF (ob DE.DL::BF.LB;) erit DL.DH::DL × BF + DL × KO. DE × HO; hoc est DL × BF + DL × KO. DH × BF + DH × KO::DL × BF + DL × KO.

DE

DE × HO ergò DH × BF + DH × KO = DE × HO, hoc est DH × BF + DH × HO − DH × BL = DE × HO, transponendo igitur est DH × HO − DE × HO = DH × BL − DH × BF, hoc est EH × HO = DH × FL; vel EH × GO + EH × HG = DE × FL + EH × FL; quare, demptis æqualibus, est EH × GO = DE × FL, vel ZG × GO = DE × FL, cum itaque DE × FL sit quid determinatum, constat lineam OBO esse hyperbolam, cujus asymptoti ZR, ZS. Fig. 39.

V. Si MO capiatur ad alteras rectæ BC partes, etiam DE, BF ad alteras punctorum D, B partes accipi debent, uti Schema monstrat; nec abludit modus demonstrandi. Fig. 40.

VI. Consectarium. Si recta BQ angulum ABC secet, perque punctum D ducantur utcunque duæ rectæ MN, XY rectam BQ intersecantes punctis QP (quorum utique sit O propius ipsi B) erit MN.MO ⊐ XY.XP. Nam per O descripta concipiatur *hyperbola* VOB (qualem jam mox attigimus, sic ut interceptæ rationem habeant illam quam MN ad MQ) erit igitur MN.MO :: (XY.XV) ⊐ XY.XP. Fig. 41.

Coroll. Dividendo est NO.MO ⊐ YP.PX.

VII. Quinimo si plures lineæ BQ, BG angulum ABC secent, & à puncto D projiciantur rectæ DN, DY (quæ rectas alteras intersecant ut vides; quarumque DN puncto B vicinior,) erit NE.MO ⊐ YF.VX. Fig. 42.

Nam NE.EO ⊐ YF.FV; & EO.OM ⊐ FV.VX. igitur ex æquo est NE.OM ⊐ YF.VX. ||

VIII. Etiam exindè patet, per B (ad partes alterutras) rectam duci posse, ità ut è D eductarum partes ab illa rectâque BC ad interceptas à rectis BA, BC rationem habeant minorem quâpiam datâ.

Nam sumatur PQ = PZ; ergò connexa BQ *hyperbolam* OBO tangit; & liquet à rectis BQ, BC interceptas ad interceptas à BC, BA minorem rationem habere, quam habent interceptæ ab hyperbolâ OBO & recta BC ad easdem, hoc est minorem datâ quâpiam.

IX. Sit rursum angulus rectilineus ABC, & punctum D; item linea Fig. 43.

linea OOO talis, ut si è D utcunque ducatur recta DO, secans
Fig. 43. anguli latera punctis M, N, habeat DM ad NO semper eandem rationem (puta X ad Y) erit etiam linea OOO hyperbola.

Nam ducatur DL ad BC parallela, sitque DL. DE :: X. Y; & per E ducatur E*R* ad AB parallela, secans BC in Z; denum per O ducatur OH ad BA parallela.

Est jam DL. DE :: DM. NO :: LM. GO (ob similia triangula DLM, NGO) :: LM × DH. GO × DH item DL × HO = LM × DH (ob DL. LM :: DH. HO) quare DL. DE :: DL × HO. GO × DH adeóq; DE × HO = GO × DH. hoc est DE × HG + DE × GO = GO × DE + GO × EH quare (communi sublato) est DE × HG = GO × EH, seu DE × HG = GO × ZG. Patet itaque curvam OOO esse *hyperbolam* cujus *asymptoti* ZR ZC.

Coroll. Si ratio data sit æqualitatis (seu DM = NO,) ipsæ AB, CB asymptoti erunt.

Sequentia quædam, quia magis id perspicuum videtur, Algebricè monstrabimus.

X. Esto positione data recta ID, in qua punctum designatum D;
Fig. 44. sit item curva DNN talis ut in ID sumpto quopiam puncto G, & ductâ rectâ GN ad positionem datam IK parallelâ, tum adsumptis determinatis rectis m, b; positisq; DG = x, & GN = y; sit constanter $my + xy = \frac{m}{b}xx$; erit linea DNN *hyperbola*; quæ sic determinatur; sumantur DM, & DO (hinc indè) pares ipsi m; & per M ducatur ML ad IK parallela, factoq; $b . m :: m . MQ$; sit $MZ = 2MQ = \frac{2mm}{b}$; tum per Z, O traducatur recta ZT; erunt ZM, ZT asymptoti.

Ducatur enim ZS ad MO parallela, cui occurrat NG in R (quæ & ipsam ZT secet in P). & connectatur DQ. Est ergò PN = RG + GN − RP. Verùm est MD. MQ :: ZR (MG). RP; hoc est $m . \frac{mm}{b} :: m + x . RP = \frac{mm}{b} + \frac{mx}{b}$ adeóq; $RG - RP = \frac{mm}{b} - \frac{mx}{b}$ ergò $PN = \frac{mm - mx}{b} + y$. Unde $PN \times MG = \frac{m^3}{b} + my + xy - \frac{mxx}{b}$ Verùm (ex hypothesi) est my +

$+xy-\frac{mxx}{b}=a$. ergò $PN\times MG=\frac{m^3}{b}=MD\times ZQ$, vel $PN.ZQ::(MD.MG::)QD.ZP$. Quapropter eſt $PN\times ZP=ZQ\times QD$. Unde palàm eſt curvam DNN eſſe hyperbolam, cujus aſymptoti ZM, ZT. Fig. 44.

XI. Notetur; ſi æquatio ſit $my-xy=\frac{m}{b}xx$; eadem habebitur *hyperbola*; tunc ſolùm puncta G ad partes DM ſumuntur. Quin & ſi æquatio ſit $xy-my=\frac{m}{b}xx$; puncta G ultra M capiendo, proveniet *hyperbola*, huic ipſi *conjugata*.

XII. Sit Triangulum BDF, & linea DNN talis, ut ductâ utcunque RN ad BD parallelâ (quæ lineas BF, DF, DNN ſecet punctis R, G, N) connexâque rectâ DN, ſit perpetuò DN proportione media inter RN, NG; erit linea DNN *hyperbola*. Fig. 45.

Per D ducatur DK ad DB perpendicularis (ſecans ipſam RN in E) & ſit FH ad DB parallela; vocentúrque $DB=b$; $DF=d$; $FH=f$; tum $DG=x$; & $GN=y$; Eſtque $d.f::x.\frac{fx}{d}=GE$; unde $\frac{2fxy}{d}+xx+yy=2EG\times GN+DGq+GNq=DNq$. Porrò eſt $d.b::FG.GR::d-x.RG=b-\frac{bx}{d}$. Unde $RN=b-\frac{bx}{d}+y$. Et ideò $by-\frac{bxy}{d}+yy=RN\times NG=DNq=\frac{2fxy}{d}+xx+yy$. quare $by-\frac{bxy}{d}=\frac{2fxy}{d}+xx$. quam æquationem ordinando fit $\frac{db}{2f+b}y-yx=\frac{d}{2f+b}xx$. quòd ſi ponatur $m=\frac{db}{2f+b}$; erit $my-xy=\frac{m}{b}xx$. Unde liquet DNN eſſe *hyperbolam*, qualis habetur in præcedente determinata,

Not. Si angulus DGN rectus fuerit, evaneſcente tum $f=0$, erit

$d = m$, vel $dy - xy = \frac{d}{b}xx$. Aliaquædam hic (nonnulla forsan παρέργως) inseremus.

Fig. 46. XIII. Sit positione data recta I D; sit item curva D N N talis, ut in I D sumpto puncto quopiam G, ductâque rectâ G N ad positionem datam I K parallelâ; sumptisque determinatis lineis g, m, r; positisque $DG = x$, & $GN = y$; sit perpetim $yx + gx - my = \frac{m}{r}xx$; linea D N N erit *hyperbola*, sic determinabilis: Sumatur $DM = m$; & per M ducatur M L ad I K parallela; & in hac accipiatur $MQ = \frac{mm}{r}$; & sit $QY = MQ$; & ab M Y auferatur $YZ = g$; connexâque Q D, ducatur Z T ad Q D parallelâ; erunt Z M, Z T *asymptoti*.

Nam ducatur Z S ad M D parallela; cui occurrat G N producta in R (sed & G R ipsam Z T secet in P). Estque jam $PN = RG - RP - GN = \frac{mm}{r} - g + \frac{mx}{r} - y$. adeoque $PN \times MG = \frac{m^3}{r} - mg + yx + gx - my - \frac{m}{r}xx = \frac{m^3}{r} - mg + o. = \frac{m^3}{r} - mg = DM \times ZQ$. unde $PN . ZQ :: (DM . MG ::) QD . ZP$. ergò $PN \times ZP = ZQ \times QD$. Liquet igitur curvam D N N esse *hyperbolam*, cujus *asymptoti* Z M, Z T.

Si æquatiò sit $-yz + gx + my = \frac{m}{r}xx$; eadem erit *hyperbola*. Sed puncta G inter B, M tunc accipiuntur; & ità prout aliis ac aliis locis puncta G designantur, æquationis signa variantur; at non est ea jam exponendi locus.

Fig. 47. XIV. Positione datæ sint rectæ D B, B A; perque rectam D B feratur recta C X ad B A parallela; item per punctum D rotando transeat recta D Y, sic ipsam B A secans in E, ut sit inter rectas B E, D C eadem semper proportio (puta quæ cujusdam assignatæ R ad DB) rectæ verò D E, C X se intersecent punctis N; erit linea D N N *Parabola*.

Nam sit $R . DB :: DB . P$. Est ergò $BE . DC :: DB . P$. Item est $DB . BE :: DC . CN$. ergò $DB . BE + BE . DC = DC . CN$

CN + DB. P. hoc est DB. DC :: DC × DB. CN × P. hoc est DB × DC. DCq :: DC × DB. CN × P. Quapropter est DCq = CN × P; ergò patet *curvam D N N esse parabolam*, cujus *parameter* P, *vertex* D; *diameter* ipsi B A parallela.

Dedit hoc *Gregorius* à S. *Vincentio*,* sed operosâ (si probè memini) prolixitate, demonstratum. *In Lib. de Spirali.

XV. Adjicimus; Si reliquis iisdem positis, ità ferantur C X, & D Y, ut jam semper habeant B E, B C rationem eandem (puta quam B D ad R) erunt etiam intersectiones ad *parabolam*. Fig. 48.

Nam bisecetur D B in G, ducatúrque G V ad B E parallela, secans curvam D N N in V; & quoniam est B C. R :: BE. BD :: CN. CD. erit B C × C D = R × C N. ergò (secundum benè notam *parabolæ proprietatem*) est curva D N N *parabola*, cujus *parameter* R, *diameter* G V.

Proletaria sunt forsan ista; sed non perinde notata occurunt hæc:

XVI. Si reliquis similiter positis, recta C X non jam ad ipsam BA, sed ad aliam positione datam (D H) feratur parallela; sitque perpetuò B E. DC :: DB. R; erunt *intersectiones* N ad *hyperbolam*. Fig. 49.

Nam ductâ N G ad B A parallelâ, nuncupentur D B = b. B H = b; D G = x. GN = y. Estque $x . y :: b . \frac{by}{x}$ = BE. item $b . b :: y . \frac{by}{b}$ = GC. quare $CD = x - \frac{by}{b}$. Est igitur (ex hypothesi) $\frac{by}{x} . x - \frac{by}{b} :: b . r$; unde talis ordinabitur æquatio; $yx + \frac{bry}{b} = \frac{b}{b} xx$. ponendóq; $\frac{br}{b} = m$; erit $yx + my = \frac{m}{r} xx$; est ergò curva D N N *hyperbola*,* quæ suprà habetur determinata. * In 10 hujus.

XVII. Quinetiam si (reliquis, ut in præcedente, suppositis) ità jam feratur C X, ut semper habeat B E ad B C rationem eandem, quam B D ad R; erunt itidem intersectiones N ad *hyperbolam*.

Nam ductâ N G ad A B parallelâ, nominentur rectæ, ut in præeunte; èstque jam $BC = b - x + \frac{by}{b}$; atque $\frac{by}{x} . b - x +$

$\frac{by}{b} :: b.r$. unde talis emerget æquatio: $yx + bx - \frac{br}{b}y = \frac{b}{b}$

Fig. 50, 51, 52. xx; hoc est (posito $\frac{br}{b} = m$) $yx + bx - my = \frac{m}{r}xx$; Est igitur curva B N N *hyperbola*, qualem superiùs exhibuimus determinatam.

XVIII. Datæ positione sint rectæ D B, B A; (& in D B designetur punctum D) sitque linea D N N talis, ut ductâ utcunque G N
Fig. 53. ad B A parallelâ; sumptis verò determinatis g, r, vocatisque D G $= x$; & G N $= y$, sit $ry - yx = gx$; erit linea D N N *hyperbola*, sic determinanda.

Capiatur D E $= r$, & B O $= g$; & per E ducatur recta E R ad B A, ac per O recta O S ad B D parallelæ; erunt Z R, Z S *asymptoti*.

Nam ductâ N P ad D B parallelâ, est Z P $= g + y$; & P N $= r - x$; quare Z P $\times$ P N $= gr - gx + ry - yx$. Verùm ex hypothesi est $- gx + ry - yx = o$. ergò Z P $\times$ P N $= gr =$ Z E $\times$ E D. unde liquido constat Propositum.

Quòd si fuerit æquatio $xy - ry = gx$; sumenda est D E $= r$; & B O $= g$ (infra rectam D B) ductisque, ceu priùs, parallelis S Z R; erit *hyperbola* N N N angulo S Z R comprehensa; quod eodem facilè comprobatur modo.

XIX. Datæ positione sint rectæ D B, B A; ac ità ferantur rectæ F X ad D B parallela, ac D Y per punctum designatum D transiens, ut sit semper ratio ipsius B E ad ipsam B F æqualis assignatæ D B ad R; erunt rectarum D Y, F X intersectiones ad lineam rectam.

Nam per N ducatur G K ad B A parallela; éstque D B . D G :: B E . G N :: B E . B F :: B D . R. itaque semper est D G $=$ R. Patet igitur factâ D G $=$ R, & ductâ G K ad B A parallelâ, intersectiones omnes ad hanc existere.

XX. Quòd si reliquis similiter positis; sumpto autem alio in B A puncto O; ab hoc sumatur computandi initium; ut nimirùm sit perpetuò B E, O F :: D B . R; erunt intersectiones N ad *hyperbolam*.

Nam ductâ N G ad A B parallelâ, sit D B $= b$; O B $= g$; D G $=$

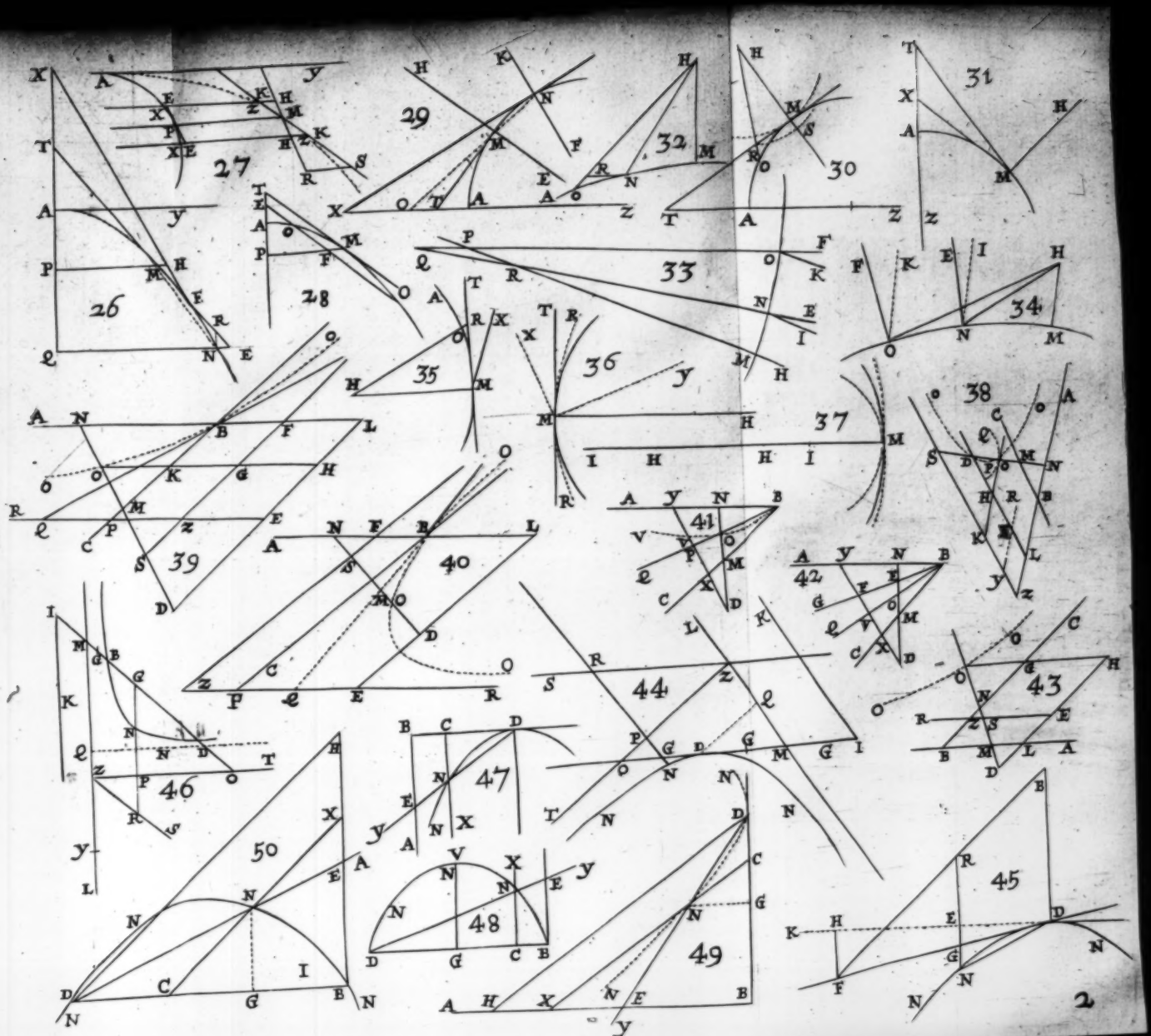

26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
36
37
38
39
40
41
42
43
44
45
46
47
48
49
50

Fig. 50, 51, 52.

Fig. 53.

$= x$; $GN = y$. ergò $BE = \frac{by}{x}$; & $OF = g + y$; ergò $\frac{by}{x}$. $g + y :: b . r$; hinc autem æquatio $ry - yx = gx$. unde DNN eſt *hyperbola* ſuprà mox determinata.

Quòd ſi punctum O ſumatur infra DB; fiet æquatio $yx - ry = gx$. unde rurſus conſtat.

XXI. Quinetiam, reliquis ſimiliter poſitis, recta FX non jam ipſi DB, ſed alteri DH feratur parallela; ità ut aſſumpto in BA puncto habeat ſemper BE ad OF rationem aſſignatam (DB ad m) erunt interſectiones N itidem ad *hyperbolam*. Fig. 54.

Nam ducatur NG ad AB parallela; vocentúrque $DB = b$; $HB = f$; $HO = g$; $DG = x$; $GN = y$; eſt ergò $x . y :: b . \frac{by}{x} = BE$; & $b . f :: x . \frac{fx}{b} = GK$; quare $NK\ (FH) = y + \frac{fx}{b}$ & $OF = y + \frac{fx}{b} - g$. Eſt ergò $\frac{by}{x} . y + \frac{fx}{b} - g :: b . m$. unde reſultat æquatio $my + gx - yx = \frac{f}{b} xx$. vel facto $f . b :: m . r$; eſt $my + gx - yx = \frac{m}{r} xx$. Conſtat igitur lineam DNN eſſe *hyperbolam*; qualis ſuperiùs habetur determinata.

Notetur, ſi computatio ab ipſo puncto H. initium ſumat, (hoc eſt ſit BE. HF :: DB. m) evaneſcente tunc termino g; erit $my - yx = \frac{m}{r} xx$; unde quoque ſuprà habetur alia determinatio ſimplicior.

XXII. Eſto triangulum ADB, & linea DYY talis, ut ductâ utcunque PM ad DB parallelâ, ſit perpetuò $PY = \sqrt{PMq - DBq}$; erit linea DYY *hyperbola*; cujus utique Centrum eſt A, *ſemidiameter* AD, (vel *aſymptotos* AB) *ſemiparameter* autem P; faciendo AD. DB :: DB. P. Fig. 55.

Sit enim $TD = 2AD$. Eſtque AD. P :: (ADq. DBq :: *6. 2. *Elem.* APq. PMq :: *$TP \times DP + ADq$. PMq :: $TP \times DP$. $PMq - DBq$ ::) $TP \times DP$. PYq. vel TD. 2P; $TP \times DP$. PYq. unde liquet Propoſitum.

Corol.

Corol. Si YS tangat *hyperbolam* DYY, erit PMq. PYq:: PA. PS.

Nam est PMq. DBq :: PAq. ADq :: PA. AS. ergò per rationis conversionem est PMq. PYq:: PA. PS.

Fig. 56. XXIII. Quòd si reliquis similiter positis, sit jam PY = √PMq + DBq; erit etiam linea YYY *hyperbola*; cujus nempe Centrum A; *Semidiameter* AF (parallela & æqualis ipsi DB) *Semiparameter* autem P, si fiat AF. AD :: AD. P.

Nam ducatur YK ipsi AP parallela cum AF conveniens in K; Sitque FT = 2FA; éstque AF. P:: (AFq. ADq:: DBq. ADq:: PMq. APq:: PYq — DBq. APq:: AKq — AFq. KYq::) TK × FK. KYq:: AF. P. unde constat Propositum.

Corol. Rursus, Si recta YS *hyperbolam* FYY tangat, erit PMq. PYq:: PA. PS.

Nam AD est *Semidiameter* ipsi AF conjugata. unde PA. AS:: PAq. ADq:: PMq. DBq. ergò PA. PS:: PMq. PMq + DBq:: PMq. PYq.

Fig. 57. XXIV. Sit triangulum ADB, rectum habens angulum ADB; & curva CGD talis, ut ductâ quâcunque rectâ FEG ad DB parallelâ (quæ lineas expositas secet ut vides) sit aggregatum quadratorum ex EF, EG æquale quadrato ex DB; erit curva CGD *Ellipsis* cujus semiaxes AD, AC.

Nam sit AV = AD. Estque ADq. DBq (ACq):: AEq. EFq:: ADq — AEq. DBq — EFq. Hoc est ADq. ACq:: VE × ED. EGq. unde liquet Propositum.

Nota, Tangat GT *ellipsin* CGD; est EFq. EGq:: EA. ET.

Nam ob AE. AD:: AD. AT. est AEq. ADq:: AE. AT. unde AEq. ADq — AEq:: AE. AT — AE. Hoc est EFq. DBq — EFq:: AE. ET. hoc est EFq. EGq:: AE. ET.

Fig. 58. Sit *Angulus rectilineus* DTH, in cujus latere TD signetur punctum A. Sit item curva VGG proprietate talis, ut ductâ rectâ quâpiam EFG ad TD perpendiculari (quæ lineas TD, TH, VGG secet punctis E, F, G,) connexáque rectâ AF, sit EG = AF; erit linea VGG *hyperbola*.

Nam ducantur AP ad TH & VPC ad TD perpendiculares; item

item PO ad TE parallela. Eſtque EFq = EOq (CPq) + OFq + 2 EO × OF (+ 2 CP × OF). Verùm ob CP. CA :: OP. OF :: CE. OF; eſt CP × OF = CA × CE; ergò EFq = CPq + OFq + 2 CA × CE. item eſt AEq = CEq + CAq — 2 CA × CE; quapropter eſt EFq + AEq = CPq + CAq + OFq + CEq. hoc eſt EGq = (APq + PFq =) CVq + PFq. vel EGq — PFq = CVq. Verùm eſt CE. (PO). PF :: CP. AP :: CP. CV; unde $EGq - \frac{CVq}{CPq} CEq = CVq$; adeóque linea GVG eſt *hyperbola*, cujus centrum C; ſemiaxes CV, CP.

Not. Ductâ rectâ FQ ad TH perpendiculari, ſumptáque QR = AE; & connexâ GR; erit GR *hyperbolæ* VGG perpendicularis; mihi præſta ſis fidem; aut ipſe rem ad Calculum exige; eò verba non profundam.

XXVI. Poſitione datæ ſint rectæ AC, BD (ſe interſecantes in X) quas decuſſet recta AB; tum ductâ utcunque rectâ PKL ad AB parallelâ, (quæ rectas AC, BD ſecet punctis P, K) ſit PL æqualis ipſi BK; erit linea ALL recta. Fig. 59.

Nam, (ductâ XQ ad BA parallelâ, eſt AQ. AP :: (BX. BK ::) QX. PL: ergò linea ALL eſt recta.

XXVII. Poſitione data ſit recta AX, & punctum D; neque non linea DNN talis; ut per D ductâ quâcunque rectâ MN (quæ rectam AX ſecet in M, & lineam DNN in N) ſit perpetim rectangulum ex DM, DN æquale dato (puta quadrato ex Z); erit linea DNN circularis. Fig. 60.

Nam ducatur DB ad AX perpendicularis; ſitque DB. Z :: Z. DE; & connectatur NE; Eſt jam DM × DN = Zq = DB × DE; quare DM. DB :: DE. DN. ergò triangula DBM, DNE ſimilia ſunt; quapropter angulus DNE rectus eſt; itaque linea DNN eſt circularis; (ad circulum pertinens, *cujus Diameter* DE).

Vides nedum rectam & *hyperbolam*; ſed & ſuo modo rectam ac *circulum* ſibi lineas eſſe reciprocas. Verùm hìc, etſi præludiis noſtris nondum abſolutis, paulùm ſubſiſtamus.

LECT. VII.

LECT. VII.

ADhuc in *Veſtibulo* hæremus; nec aliud quàm velitamus.

I. Sint duo quanta A, B; quorum majus A; adſumpto tertio quopiam X, erit $A+X.B+X \sqsupset A.B$.

Nam ob $X.A \sqsupset X.B$; erit componendo $X+A.A. \sqsupset X+B.B.$ vel permutando $X+A.X+B \sqsupset A.B$.

II. In linea YZ ſignentur tria puncta, L, M, N; & inter puncta L, N ſumpto puncto quopiam E, alteróque G extra LN (verſus Z); ſecetur EG in F, ut ſit GE. EF :: NL. LM; cadet punctum F ad partes MZ:

Fig. 61.

Nam eſt NE. ME * $\sqsubset$ NL. ML :: GE. FE $\sqsubset$ NE. PE. ergo FE $\sqsubset$ ME.

* 1 *hujus.*

III. Sint rectæ BA, DC parallelæ; item rectæ BD, GP parallelæ; pérque punctum B ducantur utcunque duæ rectæ BT, BS ipſam GP ſecantes punctis L, K, dico fore DS. DT :: KG. LG.

Fig. 62.

Nam eſt $KG.LG = KG.GB + GB.LG = PK.PS + PT.PL = DB.DS + DT.DB = DT.DS$.

IV. Eſto triangulum BDT, baſique DB parallelam quamvis PG interſecent per B ductæ quæpiam duæ rectæ BS, BR punctis L, K; dico fore $LG \times TD + KL \times RD. KG \times TD :: RD. SD$.

Fig. 63

Sumantur enim $BM = GP$, & $BN = LP$; & $BO = KP$; unde conſtat junctas PM, PN, PO ipſis TB, SB, RB (reſpectivè) parallelas eſſe. Et quoniam eſt DM. PD :: DB. TD. erit $DM \times TD = PD \times DB$. Similiter eſt $DN \times SD = PD \times DB$. quare $DM \times TD = DN \times SD = DM \times SD + MN \times SD$, tranſponendóque $DM \times TD - DM \times SD = MN \times SD$. Simili planè diſcurſu

discursu est $DM \times TD - DM \times RD = MO \times RD$. quapropter erit $MN \times SD . MO \times RD :: TD - SD . TD - RD$. hoc est $LG \times SD . KG \times RD :: TD - SD . TD - RD$; vel (ad æquationem rediigendo) $LG \times SD \times TD - LG \times SD \times RD = KG \times RD \times TD - KG \times RD \times SD$, transponendóque $LG \times SD \times TD + KG \times RD \times SD - LG \times SD \times RD = KG \times RD \times TD$. hoc est $LG \times SD \times TD + KL \times SD \times RD = KG \times RD \times TD$. vel (ad analogismum reducendo) $LG \times TD + KL \times RD . KG \times TD :: RD . SD$. Quod erat Propositum. Fig. 63.

V. Quòd si puncta T, R non ad eadem puncti D partes sita sint, erit $LG \times RD - KL \times TD . KG \times TD :: RD . SD$. Fig. 64.

Simili constabit id discursu; quem piget repetere.

VI. Sint quatuor continuè proportionalium series æquinumeræ (quales adscriptas cernis) quarum cùm antecedentes primi, tum ultimi consequentes inter se proportionales sint ($A . \alpha :: M . \mu$, & $F . \phi :: S . \sigma$) erunt ejusdem ordinis quilibet accepti quatuor etiam inter se proportionales (puta nempe, $D . \delta :: P . \pi$).

A. B. C. D. E. F.

$\alpha . \beta . \gamma . \delta . \varepsilon . \phi$.

M. N. O. P. R. S.

$\mu . \nu . o . \pi . \varrho . \sigma$.

Sunt enim $A\mu, B\nu, C o, D\pi, E\varrho, F\sigma$, & $\alpha M, \beta N, \gamma O, \delta P, \varepsilon R, \phi S$, } Continuè proportionales.

Cùm igitur sit $A\mu = \alpha M$; & $F\sigma = \phi S$, liquidum est fore $D\pi = \sigma P$; ac idcircò $D . \delta :: P . \pi$. Ad utramque proportionalitatem (tam Arithmeticam quàm Geometricam) æquè spectat hæc Conclusio.

VII. Rectæ AB, CD parallelæ sint; hásque secet positione data BD; lineæ verò EBE, FBF ita relatæ sint, ut ductâ utcunque recta PG ad DB parallelâ; sit semper PF eodem ordine media proportionalis inter PG, PE; tum per quodvis designatum lineæ EBE punctum E transeat HE ipsis AB, CD parallela, sítque alia curva KEK talis, ut ductâ utcunque QL itidem ad DB parallelâ, sit QX Fig. 65.

eodem ſemper ordine media inter QL, QI (eodem inquam illo, quo
Fig. 65. PF media fuerat inter PG, PE): dico lineas FBF, KEK analogas eſſe; hoc eſt ordinatas (quales QR, QK) eandem perpetuò inter ſe rationem habere; eandem ſcilicet illi quam habet PF ad PE.

Hoc è Lemmate proximè præmiſſo conſectatur, uti patebit, ad ſubjectum Schema mentem advertendo.

QS * QR * QI.
QL * QK * QI.
PG * PF * PE.
PE * PE * PE.
} Sunt ÷÷. unde QR. QK:: PF. PE.

Not. Pro lineis rectis AB, HE, CD ſubſtitui poſſent quælibet, etiam curvæ, parallelæ.

Fig. 66. VIII. Sint rurſus, in A concurrentes duæ rectæ AB, AD, rectaq; BD poſitione data; item duæ curvæ EBE, FBF ſic relatæ, ut ductâ utcunque PG ad DB parallelâ, ſit ſemper PF eodem ordine media proportionalis inter PG, PE; tum connexâ AE, ſit alia curva KEK talis, ut ductâ quâpiam rectâ QLI ad DB parallelâ ſit ſemper QK eodem ordine media inter QL, QI, quo fuit PF inter PG, PE; erit rurſus linea FEF ipſi KBK analoga; ſeu perpetim QR. QK:: PF. PE.

Nam QS * QR * QI.
QL * QK * QI.
PG * PF * PE.
PE * PE * PE.
} ſunt ÷÷. item QS. QL:: PG. PE. } ergò QR. QK:: PF. PE.
Et QI. QI:: PE. PE. }

Not. Pro rectis AB, AH, AD ſubſtitui poſſent tres quævis lineæ analogæ.

XI Item, ſit circulus AGB, cujus centrum D; aliæque duæ curvæ
Fig. 67. EBE, FBF tales, ut per D ductâ quâcunque rectâ DG, ſit perpetuo DF eodem ordine media proportionalis inter DG. DE; tum centro D per E deſcribatur circulus HE: ſitque præterea curva KEK talis, ut ductâ per D quâpiam (ad circulum HE) rectâ DL, ſit ſemper

DK

DK eodem ordine media inter DL, DI, quo fuerat DF inter DG, DE; erunt curvæ FBF, KBK analogæ, seu perpetuò DR. DK :: DF. DE.

Nam rursus DS. * DR. * DI.
DL. * DK. * DI.
DG. * DF. * DE.
DE. * DE. * DE.
} sunt ÷÷. unde DR. DK :: DF. DE.

Rursus, pro circulis aliæ lineæ parallelæ, vel analogæ substitui possent.

X. Sint denuò duæ lineæ quævis AGBG, EBE, & altera FBF sic ad istas relata, ut ductâ utcunque à designato puncto D recta DG, sit perpetuò DF eodem ordine media proportionalis inter DG, DE; tum adsumatur linea HEL lineæ AGB analoga (seu talis, ut per D utcunque ductâ DLS, sint perpetuò DS, DL in eadem ratione) sit denuò linea KEK talis, ut ductâ utcunque DL, sit perpetuò DK eodem ordine media inter DL, DI, quo priùs DF inter DG, DE; erit itidem linea FBF lineæ KEK analoga.

Rursus enim DS. * DR * DI.
DL. * DK * DI
DG. * DF * DE
DE. * DE * DE
} sunt ÷÷; } Et tam primi quàm ultimi quatuor termini sunt proportionales. Unde liquet Propositum.

XI. Sit Arithmeticè proportionalium Series A. B. C. D. E. F; in qua sumptis quibuscunque duobus terminis D, F; sit terminorum à primo A (exclusivè) ad ipsum D numerus, N; & terminorum ab A (itidem exclusivè) ad F, sit numerus M; erit A —: D. A —: F :: N. M.

Nam esto differentia communis, X. est ergò $D = A \pm NX$. & $F = A \pm MX$. quare $A —: D = NX$. & $A —: F = MX$. unde A —: D. A —: F :: (NX. MX ::) N. M.

XII. Hinc, si duæ fuerint ejusmodi series; & in utraque sumantur

bini, eodem ordine ſibi reſpondentes, termini (puta D, F in prima, & P, R in ſecunda) erit A —: D. A —: F :: M —: P. M —: R.

A. B. C. D. E. F.

M. N. O. P. Q. R.

Nam harum rationum utraque par eſt illi, quam habent ad ſe numeri N, M, quales in præcedente deſignati ſunt.

Hi verò Numeri N, M vulgò terminorum, quibus aptantur, exponentes, aut Indices vocantur, in ſerie quavis proportionalium; quales nos ſemper in ſequentibus intelligimus, ubi literas has adhibemus.

XIII. Sint quælibet quanta A, B, C, D, E, F continuè proportionalia Arithmeticè; nec non alia totidem, ab eodem termino A incipientia, Geometricè proportionalia; ſit autem illorum ſecundum B non majus horum ſecundo M; erit quodlibet in ſerie Geometrica majus eo, quod ipſi coordinatur in ſerie Arithmetica.

A. B. C. D. E. F.

A. M. N. O. P. Q.

Eſt enim A + N ⊏ 2 M (vel ⊏) 2 B = A + C. ergò N ⊏ C. unde M + N ⊏ B + C = A + D. Eſt autem A + O ⊏ M + N. ergò A + O ⊏ A + D. Et ideò O ⊏ D. ergò M + O ⊏ B + D = A + E. Eſt autem A + P ⊏ M + O. ergò A + P ⊏ A + E; adeóque P ⊏ E. ſimiliſque porrò diſcurſu quoad velis.

XIV. Hinc, ſi rurſus fuerint A, B, C, D, E, F ÷÷ Arithmeticè; & A, M, N, O, P, Q ſint ÷÷ Geometricè, ſitque ultimum F non minus ultimo Q; erit B majus quàm M.

Nam ſi dicatur B non majus quàm M; erit indè F minus, quàm Q contra hypotheſin.

Item, iiſdem poſitis; erit penultimum E majus penultimo P.

XV. Nam ſi F = Q; conſtat ex præcedente fore E ⊏ P (ſcilicet utramque ſeriem invertendo) ſin F ⊏ Q; potiori jure liquet fore E ⊏ P.

XVI. Quinimò demùm, iiſdem poſitis, quodlibet in ſerie Arithmetica majus eſt coordinato quolibet in ſerie Geometrica; puta, C majus eſt quàm N.

Eſt

Eſt enim E ⊏ P, ac indè D ⊏ O, & hinc C ⊏ N.

XVII. Conſectatur hinc, ſi fuerint quatuor lineæ HBH, GBG, FBF, E B E ſeſe interſecantes in B, ac ita verſus ſe relatæ, ut ductâ utcunque rectâ D H ad poſitione datam D B parallelâ (in linea nempe D D D terminatâ) vel à deſignato puncto D projectâ D H, ſit perpetuò D G inter D H, D E eodem ordine media proportionalis Arithmeticè, quo D F inter eaſdem media Geometricè, lineæ G B G, F B F ſeſe mutuò contingunt. Fig. 68. 69.

Enimverò linea G B H extra lineam F B F totam cadere manifeſtum è præcedente.

XVIII. Ex iſthinc etiam (quod ſtrictim tranſcurrens moneo) diverſis innumeris *Hyperbolarum*, aut *Hyperboliformium* generibus convenientes rectæ ἀσύμπτωτοι definiuntur. Sint nempe rectæ V D, B D poſitione datæ, ſint item aliæ duæ rectæ A B, V I, ductâ verò liberè rectâ P G ad D B parallela, ſit P φ conſtanter inter P G, P E eodem ordine media proportionalis Arithmeticè, quo P F inter eaſdem media Geometricè; quia jam (a) rectæ E G, E φ ſemper eandem obtinent rationem, eſt linea φ φ φ recta; verùm linea V F F eſt *hyperbola*, vel *hyperboliformis* aliqua (communis quidem vel *Apolloniana hyperbola*, ſi P F ſit inter ipſas P G, P E ſimpliciter media, ſed alia diverſi generis quædam *hyperboliformis*, ſi P F ſit alterius cujuſpiam ordinis media) atqui patet è penultima præmiſſa lineam φ φ φ eodem ordine reſpondenti lineæ V F F *aſymptoton* eſſe. quod an πάρεργον ſit neſcio, nobis certè πάρεργον fuit, hîc adnotâſſe. Fig. 70. (a) 12 hujus.

XIX. A puncto aſſignato B ad datam poſitione rectam A C ductæ ſint rectæ tres B A, B C, B Q; tum in Q C producta ſumatur ſumptum quodpiam D; per B recta (puta B R) duci poteſt (ad alterutras ipſius B Q partes) talis, ut à D projectâ quâcunque rectâ, ceu D N; ſit hujus à rectis B Q, B R intercepta pars (F E) minor ejuſdem à rectis B A, B C interceptâ parte (N M). Fig. 71.

Nam, primò, ſi B R ultra angulum A B C jaceat reſpectu puncti D; fiat Q R = C A; & connectatur B R; tum utcunque ducatur D E, rectas ſecans, ut vides; & manifeſtum eſt, * è ſupra monſtratis fore, F E ⊐ N M. * Per 7. Lect. VI.

Sin B Q citra angulum A B C cadat verſus D; (a) ducatur recta B H talis, ut à B Q, B H interceptæ minores ſint interceptis à B Q, B A; & ſumatur H R = Q C; & connectatur B R; tum rurſus utcunque ductâ D N, quæ rectas interſecet, ut exhibet Schema; quoniam. * Per VI. 8 Lect. Fig. 72.

(b) Constr. nium jam est KE (b) ⊐ NF; & KE ⊏ MF; perspicuum est restare FE ⊐ NM.

Ita quidem ab una rectæ BQ parte recta BR duci potest, quæ minores ipsis MN intercipiat; (a) potest autem ab altera parte recta quoque duci, quæ minores intercipiat ipsis FE; unde totum liquet Propositum.

Fig. 73. XX. In recta DZ sint tria puncta D, E, F; & in F sit vertex anguli rectilinei BFC, cujus latera secet recta DBC; per E verò ducta sit recta EG; potest ab E recta duci (ceu EH) talis, ut à puncto D projectâ utcunque rectâ DK sit in hac à rectis EG, EH intercepta minor à rectis FC, FB interceptâ.

Ducantur ES ad FC, & ER ad FB parallelæ; & in primò casu, ubi punctum E puncto D vicinius est, (ob similitudinem triangulorum (a) 19. hujus. ENM, FKI) manifestum est fore MN ⊐ IK; (a) potest autem ab E duci recta (puta EH) talis, ut interceptæ PO minores sint interceptis MN; ergò liquet.

In altero casu, ubi punctum F ipsi D propius, sumatur SL æqualis Fig. 74. ipsi CB; & connectatur EL, Estque jam IK. MN :: FK. EN :: (c) Constr. DF. DE :: FC. ES :: BC. RS (c) :: LS. RS (d) ⊏ QN. (d) 6. Lect. VI. MN. quapropter est IK ⊏ QN. (a) potest autem ab E recta duci, ceu EH, sic ut ab EG, EH interceptæ OP minores sint interceptis QN. quamobrem abundè constat Propositum.

Fig. 75. XXI. Curvam BA tangat recta BO in B; sitque recta BO æqualis curvæ BA; sumpto tunc in curva puncto quopiam K connectatur recta KO; erit KO major arcu KA.

Nam, quoniam recta minimum est inter bina puncta intervallum, est BK + KO ⊏ BO = BK + KA. ergò KA ⊏ KO.

XXII. Hinc, utcunque sumptis (ad easdem contactûs partes) duobus punctis K, L, connexâque rectâ KL; erit KL + LO ⊏ KA.

Nam, supra contactum versus A, est KL + LO ⊏ KO ⊏ KA.

Infra verò, est KL + LB ⊏ KB (ex hypothesibus *Archimedis*) adeóque KL + LO ⊏ KA.

LECT.

LECT. VIII.

MIhi ſanè videor (videbor & vobis, opinor) quod irridebat *ſapiens ille Scurra, parquam exiguæ Civitati portas ingentes extruxiſſe.* Nec enim adhuc aliud quàm ad rem aliquanto propius enitimur. ad illam.

I. Hæc adſumimus. Si duæ lineæ (O M O, T M T) ſeſe contingant, angulos ipſæ comprehendunt (O M T) rectilineo quovis angulo minores. Et vice versâ: Si duæ lineæ (O M O. T M T) angulos contineant quovis rectilineo minores, illæ ſeſe contingent (contingentibus ſaltem æquipollebunt). Fig. 76, 77.

Hujus *effati* rationem jampridem (ni fallor) attigimus.

II. Hinc; Si duas lineas O M O, T M T tertia quæpiam linea P M P contingat, ipſæ etiam lineæ O M O, T M T ſeſe contingent.

Nam quoniam lineæ O M O, P M P ſeſe contingunt, erit angulus O M P quovis *rectilineo* minor. Item, ob linearum T M T, P M P *contractum*, erit *angulus* T M P quovis etiam *rectilineo* minor. Erit igitur angulus T M O *rectilineo* quovis minor. Unde lineæ O M O, T M T ſe mutuò contingent.

III. Tangat recta F A curvam F X in F; ſitque poſitione data recta F E; ſint item duæ curvæ E Y, E Z tales, ut ductâ utcunque rectâ I L ad E F parallelâ (quæ lineas expoſitas ſecet, ut vides) ſit ſemper intercepta K L æqualis interceptæ I G; etiam curvæ E Y, E Z ſeſe contingent. Fig 78.

Si non tangant, poteſt inter ipſas conſtitui angulus rectilineus, puta B E C; hunc utcunque ſecet ad F E parallela I L; ſumatúrque G H = B C, & connectatur F H; ſunt igitur è parallelis ad F E à rectis F G,

FG, FH interceptæ pares interceptis ab EB, EC, hoc eſt minor interceptis à curvis EY, EZ; hoc eſt minores interceptis à curva FX, & rectâ FA; quapropter angulus XFA rectilineo HFG major eſt; unde recta FA curvam FX non tangit, contra *Hypotheſin*.

Fig. 79. IV. Itidem, Tangat recta FA curvam FX, & ſint duæ curvæ EY, EZ tales, ut ab aſſignato puncto D utcunque ductâ rectâ (quæ lineas expoſitas ſecet ut vides) ſit ſemper KL = IG; curvæ EY, EZ ſeſe tangent.

(a) 10 Lect. VII. Nam, ſi neges, his interſeratur *angulus rectilineus* BEC; quæ utcunque à D projecta ſecet rectam DL; (a) poteſt jam ab F recta duci (puta FH) talis, ut ſint è projectis à D a rectis FG, FH interceptæ minores interceptis ab ipſis EB, EC, hoc eſt multo minores interceptis à recta EA, curváque FX. Unde ſequetur angulum AFH rectilineo GFH majorem eſſe; ac idcirco rectam AF non contingere curvam FX, adverſus *Hypotheſin*.

Hæ præcedentes duæ Concluſiones veræ ſunt, & ſimili ratione demonſtrantur, poſito interceptas IG, KL quamvis ad ſe perpetim habere proportionem eandem. Parco verbis.

Propoſuimus hæc, ut ſequentium nonnulla à ſcrupulis muniantur.

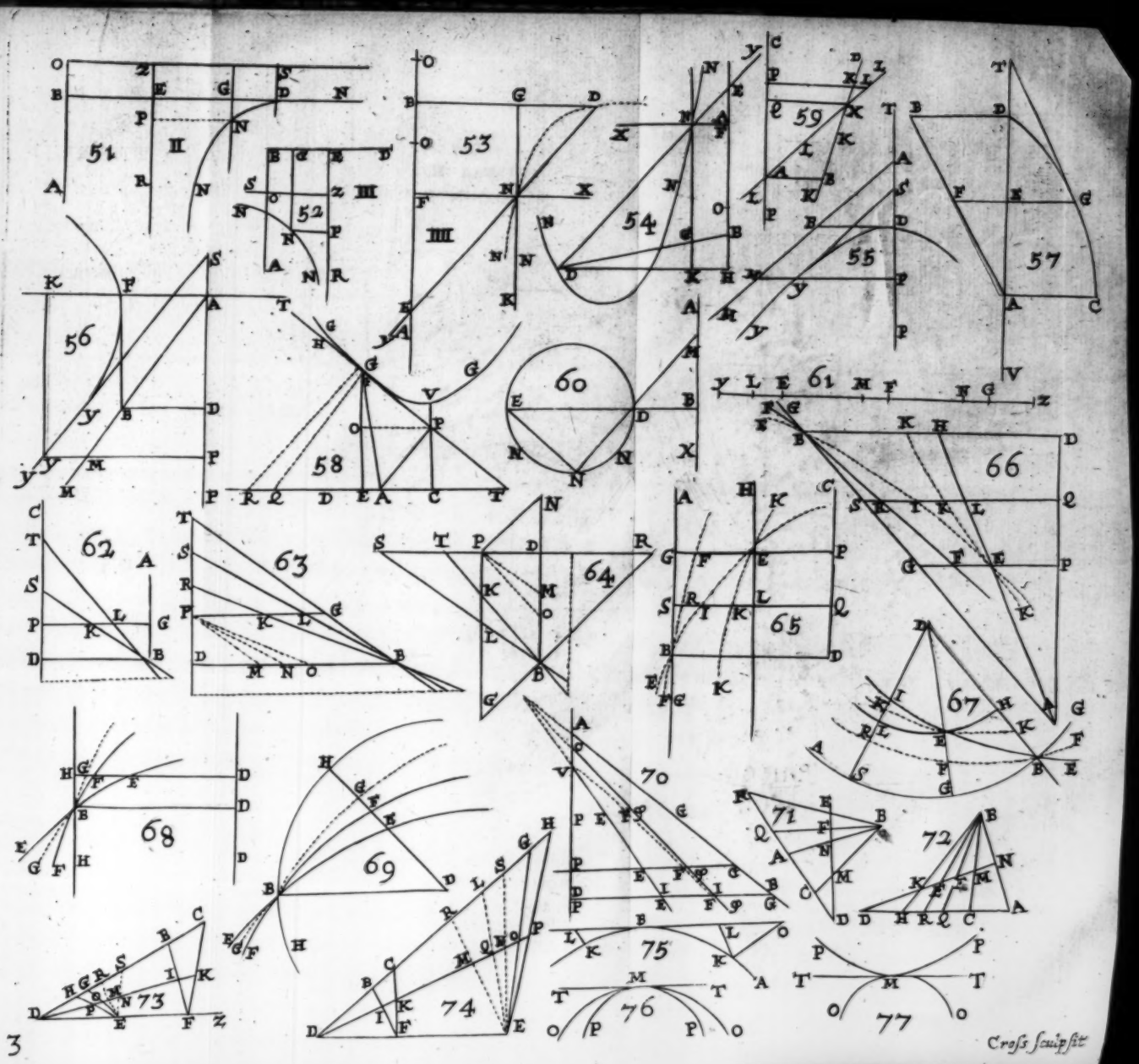
V. Sit recta VEI, duæque curvæ YFN, ZGO ſic ad ſe relatæ ut ductâ utcunque rectâ EFG ad poſitione datam AB parallelâ, habeant interceptæ EG, EF ſemper eandem rationem inter ſe; tangant autem recta TG curvarum unam ZGO in G (cum recta VE convenient in T) ducta TE alteram YFN quoque continget.

(a) *Hyp.* Nam utcunque ducatur recta IL (lineas expoſitas ut vides intercans) Eſt igitur IL. IN (a) ⊏ IO. IN :: EG. EF :: IL. IK. Igitur IN ⊐ IK. ergò punctum K extra curvam YFN jacet; totâ recta TF.

(b) *Hyp.* (c) *Schol. 4. hujus.* Aliter. Eſt IL. IK :: (IO. IN :: IK — IO. IK — IN : OL. NK, ergò cùm lineæ GL, GO ſe (b) tangant, (c) etiam lineæ FN, FK ſeſe tangent.

Fig. 80. VI. Etiam ſi tres curvæ XEM, YFN, ZGO ità referantur ad ſe ut ductâ utcunque rectâ EFG ad poſitione datam parallelâ, ſint ſemper EG, EF in eadem ratione, concurrant autem duarum XE, ZGO tangentes ET, GT in T; adjuncta TF curvam YFN tanget.

Na



3

Cross sculpsit

Fig. 79.

(a) 10 Lect. VII.

(a) Hyp.

(b) Hyp.
(c) Schol. 4 jun.

Fig. 80.

Nam (facto ut priùs) erit IL. IK:: EG. EF:: MO. MN. * quapropter erit punctum K extra curvam YFN. * 2. Lect. VII.

Possit hæc, ut præcedens, aliter ostendi; sed verbis pluribus. Curvas ità sitas concipe quales figura monstrat. nam συνολχίαν ego ac ἀδιολογίαν fugitans casus præ cæteris obvios ac faciles arripiens propono. Hoc ubique subnotatum velim.

VII. Sit punctum datum D, curvæque duæ XEM, YFN, ità relatæ, ut à D projectâ quacunque rectâ DEF, habeant ad se rectæ DE, DF rationem semper eandem; unam verò YFN tangat recta FS; cui parallela sit ER; tanget recta ER curvam XEM. Fig. 81.

Nam à D utcunque projiciatur recta DK (lineas intersecans, ut vides). Estque DK. DI:: DF. DE:: DN. DM; ergò quum sit DK ⊏ DN; erit DI ⊏ DM; quare tota recta RE extra curvam XEM cadit.

Rectæ NK, MI rationem semper eandem obtinent; unde res aliter constat.

VIII. Sint tres curvæ XEM, YFN, ZGO tales, ut si ab assignato puncto D projiciatur utcunque recta DEFG, habeant interceptæ EG, EF rationem semper eandem (puta quam R ad S) tangant autem rectæ ET, GT curvarum duas (puta XEM, ZGO) in E, G; oportet curvæ YFN tangentem ad F designare. Fig. 82.

Concipiatur curva TFV talis, ut à D utcunque projectâ rectâ DMKL, (quæ secet rectas TE, TG punctis I, L, & istam curvam in K) habeant semper interceptæ IL, IK rationem eandem datæ R ad S; (a) est igitur IK ⊏ IN; quare curva TFK curvam YFN tangit; (b) est autem curva TFK *hyperbola*; hanc tangat FS; (c) illa quoque curvam YFN tanget.

(a) 2 Lect. VIII.
(b) 4 Lect. VI.
(c) 2. *hujus.*

Quoniam *hyperbolam* tangentis hîc primum injecta est mentio; hujus (unà cum aliarum omnium consimili ratione procreatarum seu *reciprocarum linearum tangentibus*) *tangentem* ità definiemus.

IX. Sint VD recta linea, duæque curvæ XEM, YFN ità relatæ, ut ductâ liberè rectâ EDF ad positione datam parallelâ, sit semper *rectangulum* ex DE, DF par eidem alicui spatio; tangat autem recta ET curvam XEM in E, cum recta VD concurrens in T; sumatúrque DS = DT; & connectatur FS; hæc curvam YFN tanget ad F. Fig. 83.

Nam utcunque ducatur IN ad EF parallela; lineas expositas se-

cam, ut vides. Eſtque TP . PM ⊏ (TP . PI ::) TD . DE item SP . PK :: SD . DF. ergò TP × SP . PM × PK ⊏ TD × SD . DE × DF :: TD × SD . PM × PN. Verum TD × SD ⊏ TP × SP ; ac indè magis TD × SD . PM × PK ⊏ TD × SD . PM × PN. quare PM × PK ⊐ PM × PN ; vel PK ⊐ PN. Itaque recta FS extra curvam YFN tota jacet.

Not. Si linea XEM recta fuerit (utique ipſi TEI coincidens) erit YFN *hyperbola* vulgaris, cujus centrum T, *aſymptotos* una TS, altera TZ ad EF parallela.

X. Quinetiam ſit punctum D ; curvæque duæ XEM, YFN ità relatæ, ut per D ductâ quacunque rectâ EF ; ſit perpetuò rectangulum ex DE, DF æquale cuidam quadrato (ex Z puta) ; unam verò curvam XEM tangat recta ER , alterius ad F tangens ita determinatur : Ducatur DP ad ER perpendicularis : factóque DP . Z :: Z . DB ; biſecetur DB in C ; connexâque CF, ducatur FS ad CF normalis ; hæc curvam YFN tanget.

Fig. 84.

Nam centro C per F deſcribatur *Circulus* DOB ; & per B trajiciatur utcunque recta IN lineas interſecans, ut vides ; eſtque DO × DI (*a*) = DP × DB (*b*) = Zq (*c*) = DM × DN vel DO . DM :: DN . DI . ergò quum ſit DM (*c*) ⊐ DI ; erit DO ⊐ DN ; itaque circulus DOB curvam YFN tanget. Quare recta FS eandem YFN tanget.

(*a*) 27 Lect. VI.
(*b*) *Conſtr.*
(*c*) *Hyp.*

XI. Curvæ XEM, YFN tales ſint, ut ductâ quâpiam FE ad poſitione datam parallelâ, ſit ſemper hæc æqualis eidem alicui ; curvam autem YFN tangat recta SF ; huic parallela RE alteram XEM continget.

Fig. 85.

Nam utcunque ductâ MK ad FE parallelâ eſt NI ⊐ (KI = FE =) NM. Quare punctum I extra curvam XEM jacet, *&c.*

Reverà linea XEM nil aliud eſt , quàm ipſa YFN *tranſlocata.* Levius hoc, & methodi tantùm gratiâ Propoſitum.

XII. Sit curva quæpiam XEM quam tangat recta ER ad E ; ſit item alia curva YFN ad alteram ità relata, ut ab aſſignato puncto D utcunque ductâ rectâ DEF, ſit ſemper intercepta EF æqualis alicui determinatæ Z ; curvæ YFN tangens (ad F) ità deſignatur : Sumatur DH = Z ; & per H ducatur AH ad DH perpendicularis , ipſi ER occurrens in B & per F ducatur FG ad AB parallela ; ſumatúrque GL = GB ; erit connexa LFS curvæ YFN tangens.

Fig. 86.

Nam

Nam *asymptotis* ER, AB per F descripta concipiatur *hyperbola* OFO, cui occurrat à D projecta quæpiam DO, lineas expositas secans, uti cernis. Estque QO (*a*) = DP; (*b*) quare MO ⊏ DP (*c*) ⊏ DH (*b*) = MN. ergò *hyperbola* OFO curvam YFN tangit.

(*a*) *Convers. 9. Lect. VI.* (*b*) *Hyp.* (*c*) *Elem.*

Verùm (*d*) recta LS *hyperbolam* OFO tangit; hæc itaque curvam YFN quoque tanget.

(*d*) *9. hujus.*

Not. Si XEM ponatur linea recta (vel ipsi ER coincidat) erit YFN *Conchois* prima vulgaris, seu *Nicomedea*; hujus igitur tangens è generali ratione quâdam habetur determinata.

XIII. Sit recta LA, curváque quæpiam BEI; cum alia curva DFG talis, ut ductâ liberè rectâ PFE ad positione datâm quandam parallelâ, possit recta PE quadratum ex PF unà cum quadrato ex datâ Z; item curvam BEI tangat recta ET; tum fiat PEq. PFq :: PT. PS; connexa SF curvam DFG tanget. Fig. 87.

Nam concipiatur curva VFH talis, ut liberè ductâ QK ad PE parallelâ (quæ lineas expositas secet ut vides) sit perpetuò QKq = QHq + Zq; unde quoniam est QK (*a*) ⊏ QI; erit QKq − Zq ⊏ QIq − Zq; hoc est QHq ⊏ QGq; ergò curva VFH curvam DFG tanget ad F; (*b*) est autem curva VFH *hyperbola*, quam (*c*) tangit recta SF. hæc itaque curvam DFG quoque continget.

(*a*) *Hyp.* (*b*) *22. Lect. 6.* (*c*) *Cor. 22. Lect. I.*

XIV. Cætera ponantur eadem; at jam PE unà cum quadrato ex data Z possit quadratum ex PF; fiatque PEq. PFq :: PT. PS; & connectatur FS; hæc rursus ipsam GFG continget. Fig. 88.

Similis est demonstratio; sed adhibe 23am primæ Lectionis.

XV. Sint curvæ duæ AFB, CGD, communem habentes *axem* AD, ac ità versus se relatæ, ut ductâ quâcunque rectâ FEG ad AD perpendiculari (quæ rectas expositas secet ut vides) sit summa quadratorum ex ipsis EF, EG æqualis quadrato ex determinata recta Z; tangat autem recta FR ex his curvis unam AFB; & fiat EFq. EGq :: ER. ET; connexa GT curvam CGD quoque tanget. Fig. 89.

Concipiatur enim curva OGO talis, ut ductâ rectâ KQO (quæ rectas FR, ER secet punctis K, Q, curvam OGO in O) sit QKq + QOq = Zq, erit ideò QKq + QOq = QIq + QLq; & cùm sit QKq (*a*) ⊏ QIq, erit ideò QOq ⊐ QLq. itaque curva OGO curvam CGD (introrsum) tangit (*b*) Est autem (ex ostensis)

(*a*) *Hyp.* (*b*) *24. Lect. VI.*

oſtenſis) curva O G O *Ellipſis*, quam recta G T tangit. ergò recta G T curvam C G D quoque tanget.

Fig. 90. XVI. Sit curva quæpiam A F B (cujus axis A D, & ad hunc applicata D B) ſit etiam alia curva V G C ad iſtam ſic relata, ut à deſignato quodam in axe A D puncto Z ad curvam A F B utcunque ductâ rectâ Z F, & per F ductâ rectâ E F G ad D B C parallelâ, ſit E G æqualis ipſi Z F; ſit autem P Q perpendicularis curvæ A F B; ſumatúrque Q R æqualis ipſi Z E; connexa recta G R ipſi curvæ V G C perpendicularis erit.

Nam ducatur F T ad ipſam F Q perpendicularis, ſeu curvam A F B tangens; & concipiatur curva O G O talis, ut ductâ quâcunq; rectâ H K O ad E F G parallelâ (quæ rectas T E, T F, & curvam O G O ſecet punctis H, K, O) connexâque Z K, ſit H O = Z K; tum ductâ Z I quoniam H K (*a*) ⊏ H I, erit Z K ⊏ Z I, vel H O ⊏ H L; quare curva O G O curvam V G C tangit. (*b*) Eſt autem O G O (ex oſtenſis) *Hyperbola*, cui perpendicularis eſt recta G R; eadem itaque G R curvæ V G C quoque perpendicularis erit: Quod E. D.

(*a*) *Hyp.*
(*b*) 25 Lect. VI

Fig. 91. XVII. Sint recta D Q, duæque curvæ D R S, D Y X ità relatæ, ut ductâ utcunque rectâ R E Y ad poſitione datam D B parallelâ (quæ dictas lineas ſecet, ut perſpicis) connexâque rectâ D Y, ſit ſemper R Y. D Y :: D Y. E Y; tangat autem recta R F curvam D R S ad R; oportet curvæ D Y X tangentem ad Y rectam deſignare.

Concipiatur linea D Y O talis, ut ductâ utcunque G O ad D B parallelâ (quæ lineas F R, F P, D Y O ſecet punctis G, P, O) connexâque D O ſit ſemper G O. D O :: D O. P O; tanget curva D Y O curvam D Y X ad Y; Nam ſecet recta G O curvas D R S, D Y X punctis S, X; & connectantur rectæ D G, D S, D X; patet (è curvarum natura) angulos X D P, D S P; nec non angulos O D P, D G P æquari; quare cum angulus D S P major ſit angulo D G P; erit angulus X D P angulo O D P major, adeóque P X major erit quàm P O; hinc curva D Y O curvam D Y X tanget ad Y; eſt autem curva D Y O *hyperbola* (*a*) ſuperiùs determinata; hanc tangat Y S; hæc igitur curvam D Y X quoque tanget.

(*a*) 12 Lect. VI.

Not. Si curva D R S ſit circulus, & angulus Q D B rectus, erit curva D Y X *ciſſois* vulgaris; hujus itaque (cum innumeris aliis ſimiliter genitis) tangens hîc definitur.

Fig. 92. XVIII. Poſitione datæ ſint rectæ D B, B K; ſitque curva D Y X talis;

talis; ut à puncto D ductâ quâvis rectâ DYH (quæ rectam BK secet in H, curvam DYX in Y) sit perpetuò subtensa DY æqualis rectæ BH; oportet curvæ DYX tangentem ad Y rectam determinare.

Centro D per B ducatur circulus BRS; cui occurrat recta YER ad BK parallela; & connectatur DR; estque (propter ang. DYE = ang. DHB; & DY = BH, ac DR = DB) triangulum RDY triangulo DBH simile ac æquale; quare RY. YD :: (DH. HB) :: YD. YE. unde ex præcedente determinabilis est recta curvam DYX tangens in Y.

XIX. Sint itidem rectæ DB, BK positione datæ; nec non curva BXX talis, ut à puncto D projectâ quâcunque rectâ DX (quæ rectam BK secet in H, curvámque BXX in X) sit perpetuò HX ipsi BH æqualis; designetur oportet recta curvam BMX tangens in X. Fig. 93.

Concipiatur curva DYY talis, ut perpetuò sit DY = BH (talis nempe, qualem attigimus in præcedente) hanc verò tangat recta YT in Y, ipsi BK occurrens in R; tum *asymptotis* RB, RT per X descripta censeatur *hyperbola* NXN; ad quam utcunque projiciatur recta DN (lineas expositas secans, ut vides) Estque jam OM (*a*) = DI) ⊐ (*a*) (DL (*b*) =) ON, ergò *hyperbola* NXN curvam BXX tangit ad X. Ducatur itaque recta XS *hyperbolam* NXN contingens, hæc ipsam curvam BXX quoque continget.

(*a*) *Constr.*
(*b*) *Convers.* 9. Lect. VI

Cæterùm satis pro hac vice nugati videmur; cessemus aliquantisper.

LECT. IX.

LECT. IX.

QUod ingreſſi ſumus iter actutùm rectà proſequemur.

I. Sint rectæ A B, V D ſibi parallelæ; quas ſecat poſitione data D B; tranſeant verò per B lineæ E B E, F B F ità ad ſe relatæ, ut ductâ quâvis P G ad D B parallelâ, ſit perpetuò P F inter P G, P E eodem ordine deſignato media *Arithmeticè*; tangat autem recta B S curvam E B E; oportet lineæ F B F tangentem (ad B) deſignare.

Fig. 94.

Sint Numeri N, M proportionalium P F, P E (quales (*a*) explicuimus ſupra) exponentes; fiátque N. M :: D S. D T; connectatúrque T B; hæc lineam F B F continget.

(*a*) 12. Lect. VII.

Nam utcúnque ducta ſit recta P G, dictas lineas ſecans, utì cernis: Eſtque F G. E G (*b*) :: N. M :: (*c*) D S. D T :: (*d*) L G. K G; cùm ergò (*e*) ſit K G ⊐ E G; erit L G ⊐ F G; unde liquet rectam T B extra curvam F B F totam conſiſtere.

(*b*) 11. Lect. VII.
(*c*) *Conſtr.*
(*d*) 3. Lect. 7.
(*e*) *Hyp.*

II. Reliquis perſtantibus iiſdem, ſit jam P F inter P G, P E media proportionalis Geometricè (eodem ordine media nempe, quo fuit priùs Arithmeticè) eadem B T curvam F B F continget.

Etenim è mediis Arithmeticè Geometricéque proportionalibus hocce modo conſtructæ lineæ ſeſe mutuò (*a*) contingunt ad B; ergò cùm recta B T tangat unam, hæc alteram quoque continget.

(*a*) 17. Lect. 7.

Exemplum. Sit P F inter P G, P E è ſex mediis tertia; erit ergò M = 7; & N = 3; adeóque D S. D T :: 3. 7.

III. Manente porrò quoad cætera proximè præcedente hypotheſi, ſumptóque quovis in curva F B F puncto F; etiam ad hoc punctum tangens recta ſimili pacto deſignatur.

Fig. 95.

Nempe per F ducatur recta P G ad ipſam D B parallela, ſecans curvam E X E in E, tum E X tangat curvam E B E in E; fiátque N. M ::

M : : PX . PY , connectatúrque recta FY, hæc curvam FBF continget.

Nam per E ducatur recta C E ad A B (vel V D) parallela ; concipiatúrque per E transiens curva H E H talis, ut ductâ quâpiam Q L ad D E parallelâ (curvas E B E, H E H in L, & H ; rectáſque C E, V P in I ac Q ſecante) ſit ſemper Q H inter Q I, Q L eodem ordine media, quo P F inter P G, P E ; è præcedente jam conſtat rectam connexam E Y curvam H E H contingere ; verùm curvæ H E H (*a*) analoga eſt curva F B F ; (*b*) ergò recta F Y curvam F B F quoque continget.

a 7. Lect. 7.
b 5. Lect. 8.

IV. Adnotetur, poſito lineam E B E rectam eſſe, quòd linea FBF parabolarum ſeu paraboliformium aliqua ſit. quare quod de his paſſim obſervatum habetur (ex calculo deductum, & inductione quâdam comprobatum, neſcio tamen an uſpiam Geometricè oſtenſum) ex immensùm uberiore fonte manat, ad innumeras aliorum generum curvas ſe diffundente.

V. Hinc apertè conſectatur ; ſi T D ſit recta, ſintque duæ quædam curvæ E E E, F F F ità ad ſe relatæ, ut ductis rectis P E F ad poſitione datam B D parallelis, ſint ordinatæ P E ſemper ut quadrata ex ordinatis P F ; rectæ verò E S, F T (ex ejuſdem communis ordinatæ terminatis ductæ) curvas haſce contingant ; erit T P = 2 S P ; Quod ſi ordinatæ P E ſe habeant ut ipſarum P F cubi, erit T P = 3 S P ; ſi P E ſint ut quadrato quadrata ipſarum P F, erit T P = 4 S P ; ac ſic eodem ad infinitum continuo tenore. Fig. 96.

VI. Sit porrò Circulus A B C, cujus Centrum D, radius D B, item lineæ E B E, F B F per B tranſeuntes, ac ità relatæ, ut ductâ per D rectâ quâpiam D G, ſit ſemper D F eodem ordine media Arithmeticè inter D G, D E ; tangat autem recta B O curvam E B E in B ; oportet curvæ F B F tangentem (ad B) delignare. Fig. 97.

Hoc (certè (*a*) generatim quadantenus præſtitum) è re fuerit hìc ſpeciatim apertius atque plenius exequi : Quorſum ſit D Q ad D B perpendicularis, quam ſecet B O in S ; fiat verò N . M : : D S . D T ; connectatúrque recta T B ; hæc curvam F B F tanget.

a 8. Lect. 8.

Tangat enim recta P B *circulum* A B G ; ſecentúrque rectæ D S in X, & B S in Y, ità ut ſit D S . D X : : M . N : : B S . B Y ; perque puncta X, Y ducantur X Z ad B S, & Y V ad D S parallelæ, concurrentes in C ; tum *aſymptotis* Y C Z per B traducta concipiatur *hyperbola* L B L ; porrò ex D projiciatur utcunque recta D P dictas lineas inter- Fig. 97.

a Converſ. 4. Lect. VI. *b 11. Lect. VII.* *c 1. Lect. VII.* *d Conſtr.*

interſecans, ut expreſſum vides; eſtque jam PK. PL :: (*a*) M. N :: (*b*) GE. GF (*c*) ⊏ PE. PF ⊏ PK. PF; quare PL ⊐ PF; igitur *Hyperbola* LBL curvam FBF tangit. Protracta jam TB cum XZ conveniat in R, eſtque tum RZ. ZB :: BS. ST. unde RZ × ST = BS × ZB = BS × SX. atqui propter DS. SX :: (*d*) BS. SY, eſt DS × SY = BS × SX. ergò RZ × ST = DS × SY = DS × CX. vel RZ. CX :: DS. ST, compoſitéque RZ + RZ + CX :: DS. DT :: (*d*) N. M :: CZ. CZ + CX. itaque diviſim eſt RZ. CX :: CZ. CX. adeóque RZ = CZ; unde RB *hyperbolam* LBL tangit; hæc igitur (RBT) curvam FBF, ipſi LBL contiguam, quoque tanget. quod erat Propoſitum.

VII. Hinc ſi perſiſtentibus reliquis, recta tantum DF jam inter DG, DE perpetuò Geometricè media ſtatuatur (eodem qui priùs fuit ordine) eadem BT curvam FBF quoque continget.

Etenim ex mediis ejuſdem ordinis *Arithmeticè Geometricéque* proportionalibus effornatæ lineæ ſe mutuò contingunt, adeóque communi rectâ tangente gaudent.

Fig. 98.

VIII. Porrò (ſtantibus reliquis ut in poſtremâ) quodvis in curva FBF deſignetur punctum F, quæ curvam ad hoc tanget recta ſimili pacto determinatur.

Connectatur utique recta DF curvam EBE ſecans ad E; item ducatur DQ ad DG perpendicularis ipſam EO interſecans ad X; fiat etiam DX. DY :: N. M; & connectatur EY; ipſi demùm EY parallela ducatur FZ; hæc curvam FBF continget.

Nam centro D per E ducatur circulus CEI; concipiatúrque linea HEH talis, ut à D eductâ quacunque rectâ DI (quæ circulum CE ſecet in I, curvam HEH in H, & ipſam EBE in L) ſit pepertuò DH eodem inter DI, DL ordine proportionalis, quo DF inter DG, DE; palam eſt tunc (è præcedente) quòd recta EY curvam HEH tanget; verùm ipſi HEH (*a*) analoga eſt curva FBF; (*b*) quare recta FZ curvam FBF quoque tanget.

a 9. Lect. VII. *b 7. Lect. VIII.*

Exhinc nedum innumerarum ſpiralium; at aliarum diverſi generis infinities plurium tangentes quàm promptè determinantur.

Fig. 99.

IX. Hinc clarum eſt, ſi duæ lineæ EEE, FEF ſic ad ſe referantur, ut à puncto quodam D utcunque projectis rectis DEF; habeant ſe rectæ DE, ut quadrata ex ipſis DF, & ad harum terminos tangant curvas rectæ ES, FT; cum perpendicularibus ad ipſas

DEF

DEF concurrentes punctis S, T; erit ſemper DT = 3 DS. Quòd ſi DE ſunt ut cubi ipſarum DF, erit ſemper DT = 3 DS; ac ſimili deinceps modo. Fig. 99.

X. Sint rectæ VD, TB concurrentes in T, quas decuſſet poſitione data recta DB; tranſeant etiam per B lineæ EBE, FBF tales, ut ductâ quâcunque PG ad DB parallelâ, ſit perpetuò PF eodem ordine media Arithmeticè inter PG, PE; tangat autem BR curvam EBE, oportet lineæ FBF tangentem ad B determinare. Fig. 100.

Sumptis NM (ordinum in quibus ſunt PF, PE exponentibus) fiat $N \times TD \overset{+M}{-N} \times RD . M \times TD :: RD . SD$; & connectatur BS; hæc curvam FBF continget.

Nam utcunque ducta ſit PG, dictas lineas ſecans ut vides. Eſtque EG. FG :: (a) M. N. ergò FG × TD. EG × TD :: N × TD. M × TD. Item EF × RD. EG × TD :: M — N × RD. M × TD. Quapropter (antecedentes conjungendo) erit FG × TD + EF × RD. EG × TD :: N × TD + M — N × RD. M × TD; (hoc eſt) :: (b) RD. SD. (c) Eſt autem LG × TD + KL × RD. KG × TD :: RD. SD. quare FG × TD + EF × RD. EG × TD :: LG × TD + KL × RD. KG × TD. hinc, cùm ſit EG (d) ⊏ KG; erit FG × TD + EF × RD ⊏ LG × TD + KL × RD; vel FG. EF + TD. RD ⊏ LG. KL + TD. RD; ſeu (demptâ communi ratione) FG. EF ⊏ LG. KL. vel componendo EG. EF ⊏ KG. KL (e) ⊏ EG. EL. unde eſt EF ⊐ EL. itaque punctum L extra curvam FBF ſitum eſt; adeoque liquet Propoſitum.

(a) 11. Lect. VII. (b) Conſtr. (c) 4. Lect. VII. (d) Hyp. (e) 1. Lect. VII.

XI. Quinetiam, reliquis ſtantibus iiſdem, ſi PF ſupponatur ejuſdem ordinis Geometricè media liquet (planè ſicut in modò præcedentibus) eandem BS curvam FBF contingere.

Exemplum. Si PF ſit è ſex mediis tertia, ſeu M = 7; & N = 3; erit 3 TD + 4 RD. 7 MD :: RD. SD; vel $SD = \frac{7MD \times RD}{3TD + 4RD}$.

XII. Patet etiam, accepto quolibet in curva FBF puncto (ceu F) rectam ad hoc tangentem conſimili pacto deſignari. Nempe per F ducatur recta PG ad DB parallela, ſecans curvam EBE ad E; & per E ducatur ER curvam EBE tangens; fiátque $N \times TP \overset{+M}{-N} \times RP$. Fig. 101.

M × T P :: R P . S P ; & connectatur S F ; hæc curvam F B F tanget ; id quod omnino simili discursu demonstratur, quo tertia hujus ; tantùm hîc (non per E ad V D parallela ducitur, at) connectitur E T ; & loco septimæ allegatur octava septimæ Lectionis. quid plura?

XIII. Adnotetur, si linea E B E sit recta, (rectæ nempe B R coincidens) esse lineam F B F ex *infinitis hyperbolis* (vel *hyperboliformibus*) aliquam ; quarum igitur (unà cùm aliarum infinities diversi generis plurium) *Tangentes* determinandi modum uno *Theoremate* complexi sumus.

XIV. Quòd si puncta T, R non ad easdem partes puncti D (vel P)
Fig. 102. cadant ; curvæ F B F tangens (B S) designatur faciendo N × R D —: $\left.\begin{matrix}M\\-N\end{matrix}\right\}$ × T D . M × T D :: R D . S D.

Simili planè discursu constat hoc, tantùm (quartæ loco) septimæ Lectionis quintam adhibendo.

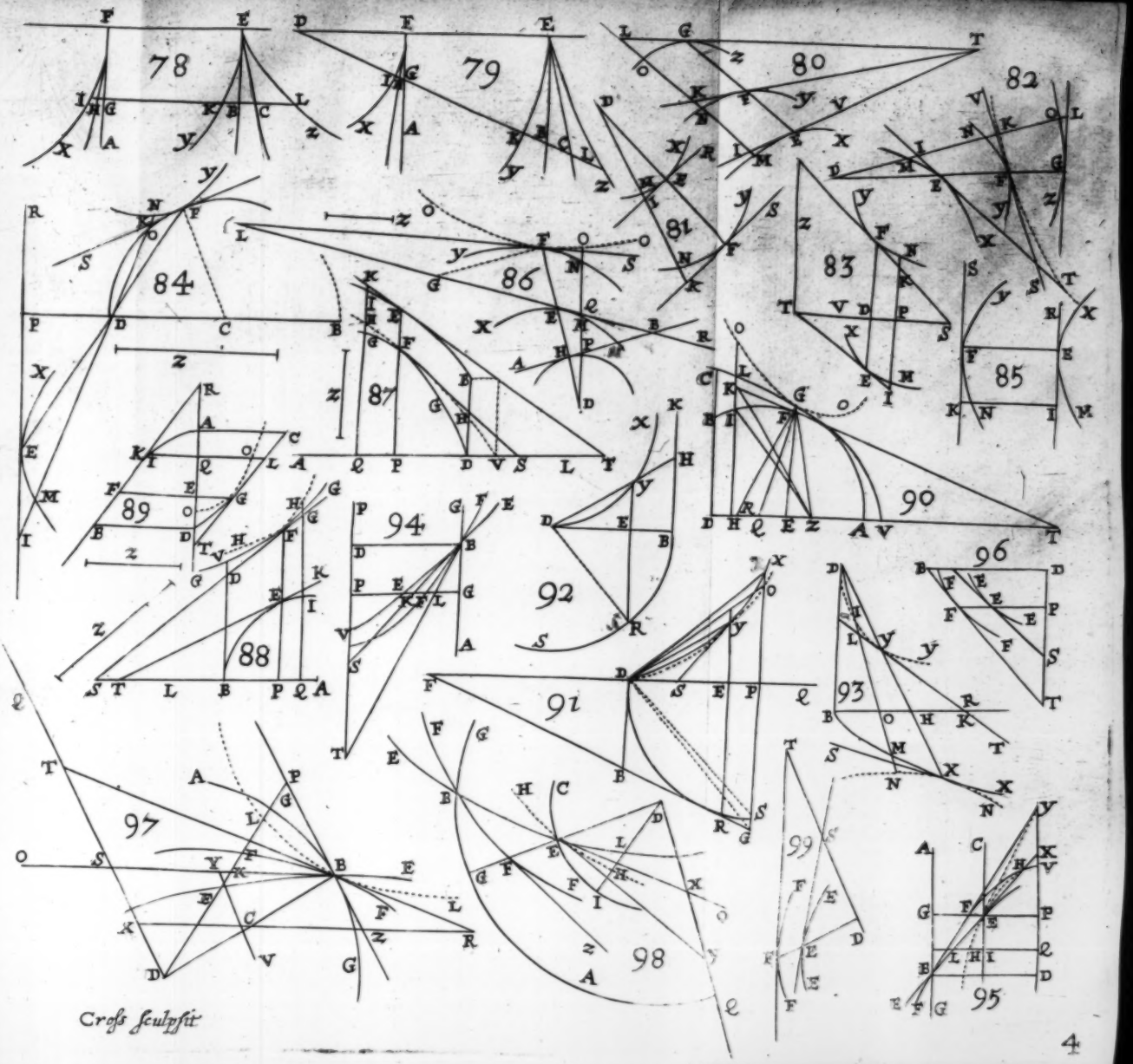
XV. Hinc autem nedum *Ellipsoidum* omnium (posito nempe lineam E B E rectam esse, lineæ B R coincidentem) ast aliarum alterius generis *linearum innumerabilium Tangentes* unâ operâ determinantur.

Exemplum. Si P F sit è quatuor mediis quarta, seu M = 5 ; & N = 4 ; erit $SD = \frac{5\,TD \times RD}{4\,RD - TD}$.

Notetur; Si contigerit esse N D × R D = $\left.\begin{matrix}M\\-N\end{matrix}\right\}$ × T D, esse D S infinitam ; seu B S ipsi V D parallelam. Alia possent adnotari ; sed relinquo.

XVI. Inter alias curvas innumeras, etiam hâc methodo *Cissois* &
Fig. 103. *Cissoidalium* omne genus comprehenditur : Sit utique semirectus angulus D S B ; curvæque duæ S G B, S E E sic ad se referantur, ut ductâ liberè rectâ G E ad B D parallelâ, (quæ lineas expositas, ut conspicis, secet) sint P G, P F, P E continuè proportionales ; tangat autem recta G T curvam S G B in G, reperietur quæ ad E lineam S E E tangit, faciendo 2 T P — S P . T P :: S P . R P ; utique connexa R E curvam S E E tanget. Id quod è præmissis facilè colligitur. Quòd si jam curva S G B sit circulus, & applicationis angulus S P G

si



Cross sculpsit

Fig. 102.

Fig. 103.

sit rectus, erit curva SEE *Cissois vulgaris*, seu *Diocles*; alioquin alterius generis *Cissoidalis*. Hoc autem ἐν παρόδῳ perstringo. Neq; jam amplius vos detinebo.

LECT. X.

INstitutum circa tangentes negotium adhuc urgeo.

I. Sit curva quæpiam AEG, nec non alia AFI sic ad illam relata, ut ductâ quâcunque EF ad positione datam AB parallelâ (quæ curvam AEG secet in E, curvámque AFI in F (sit perpetim EF æqualis curvæ AEG ab A intercepto arcui AE; tangat autem recta ET curvam AEG in E, sitque ET æqualis arcui AE, & connectatur recta TF; hæc curvam AFI tanget. Fig. 104.

Nam ducatur utcunque recta GK ad AB parallela, lineas propositas secans, ut cernis; éstque GK = GH + HK = GH + HT (a) ⊏ arc. AG = GI; unde punctum K extra curvam AFI situm est; adeóque recta TK ipsam tangit. (a) 22 Lect. VII.

II. Quòd si recta EF quamlibet ad arcum AE rationem semper eandem habeat, nihilo seciùs recta FT curvam AFI tanget; ut ex hac, & octavæ Lectionis sexta manifestæ consectatur.

Hæc antea pridem aliter ostendimus; ast hæc demonstratio simplicior aliquanto videtur, & clarior; methodóque quam insinuamus accommodatior.

III. Sit *curva* quæpiam AGE, punctúmque *designatum* D; sit item alia curva AIF talis, ut à D projectâ rectâ quâcunque DEF, sit semper intercepta EF par arcui AE; tangátque recta ET curvam AGE; oportet curvæ AIF *Tangentem* (ad F) designare. Fig. 105.

Fiat TE = arc. AE; sitque curva TKF talis, ut ductâ utcunque (è D) rectâ DK (quæ curvam TKF secet in K, rectámque TE in H)

sit semper HK = HT; tum curvam TKF (a) tangat recta FS in F; hæc curvam AIF quoque continget.

(a) 17. Lect. VIII.

Est enim GK = GH + HK = GH + HT (a) GA = GI. quare punctum K extra curvam AIF jacet; adeóque recta FS curvam AIF continget.

(a) 22. Lect. VII.

IV. Quòd si recta EF ad arcum AE eandem aliquamcunque statuatur habere proportionem, tangens ejus facilè determinatur ex hac, & octava octavæ Lectionis.

V. Sint recta AP, duæque *curvæ* AEG, AFI, ità ad se relatæ ut ductâ utcunque rectâ DEF (quæ rectam AP, curvas AEG, AFI punctis D, E, F, secet) sit semper recta DT æqualis arcui AE; tangat autem recta ET curvam AEG ad E; sumatúrque ET par arcui EA; & sit TR ad BA parallela; connectatur denuò recta RF; hæc curvam AFI tanget.

Fig. 106.

Concipiatur enim curva LFL talis; ut ductâ quâcunque rectâ PL ad AB parallelâ (quæ curvam AEG in G, rectam TE in H, curvam LFL in L secet) sit perpetuò recta PL æqualis ipsis TH, HG simul; est itaque PL (a) ⊏ arc. AEG* = PI. Unde curva LFL curvam AFI tangit. Item recta IK (b) æquatur rectæ TH; (c) adeóque curva LFL rectam RFK tangit; (d) quare curvam AFI tanget recta.

(a) 22. Lect. VII.
(b) 26. Lect. VI.
* Hyp.
(c) 3 Lect. VIII.
(d) 2. Lect. VIII.

VI. Etiam si rectæ DE ad arcus AE quamlibet semper eandem rationem habeant, recta RF nihilominus curvam AFI tanget, ut ex hac, & sexta octavæ Lectionis facilè patet.

VII. Sit punctum D; duæque curvæ AGE, DIF ità versus se relatæ sint, ut à puncto D projectâ quâvis rectâ DFE, sit perpetuò recta DF æqualis arcui AE; tangat autem recta ET curvam AGE ad E; designanda jam est recta, quæ curvam DIF tangat (ad F).

Fig. 107.

Sumatur ET par *arcui* FS; concipiatúrque *curva* DKK talis, ut à D projectâ utcunque rectâ DH (quæ curvam DKK in K, rectam TE in H secet) sit perpetuò DK = TH; tum curvam DKK (a) tangat recta FS ad F; hæc curvam DIF quoque tanget.

(a) 16. Lect. VIII.

Intelligatur enim *curva* LFL talis, ut à D projectâ quapiam rectâ DH (quæ rectam TE secet in H, curvam LFL in L) sit semper DL = TH + HG; est itaque DL (b) ⊏ arc. AG (c) = DI; (d) itaque curvæ DIF, LFL sese (b) contingent. item curvæ KEK, LFK

(b) 22. Lect. VII.
(c) Hyp.
(d) 4. Lect. VIII.

LFK ſeſe contingunt. (e) quare curvæ DIF, KFK ſe quoque contingent. (e) ergo denique recta FS curvam DIF continget. (e) 2. Lect. VIII.

VIII. Quod ſi rectæ DF quamvis aliam conſtanter eandem ad arcus AE rationem obtinuerint, itidem deſignari poteſt recta curvam DIF tangens, ex hac, & ſeptima octavæ Lectionis; erit utique tangens iſta huic FS parallela.

IX. Hinc nedum *ſpiralis circularis*, aſt innumerabilium ſimili ratione progenitarum aliarum curvarum *Tangentes* determinantur.

X. Sint curva quæpiam AEH, recta AD (in qua determinatum punctum D) recta DH poſitione data; ſit item curva AGB talis, ut in hac aſſumpto quocunque puncto G, & per hoc ac D projectâ rectâ DGE (quæ curvam AEH ſecet in E) ductâque GF ad DH parallelâ habeant AE, AF aſſignatam rationem X ad Y; tangat autem recta ET curvam AEH, recta deſignetur oportet, quæ curvam AGB ad G tangat. Fig. 108.

Fiat recta EV æqualis arcui EA; & concipiatur curva OGO talis, ut projectâ quâcunque rectâ DOL (quæ curvam OGO ſecet puncto O, rectam ET in L) ductâque OQ ad GF parallelâ, ſit VL. AQ :: X. Y, eſtque curva OGO (è ſupra monſtratis) *Hyperbola*; hanc tangat recta GS; etiam recta GS curvam AGB continget.

Nam concipiatur altera curva NGN talis, ut cùm hanc ſecet recta arbitraria DL in N, curvam AEH in K, rectam TE in L; ductáq; ſit NR ad GF parallela, ſit VL + LK. AR :: X. Y; manifeſtum eſt curvam NGN utramque curvam AGB, & OGO tangere. [ſecet enim recta DL curvam AEB in I, ducatúrque IP ad GF parallela; quum ergò ſit VL + LK. AR :: X. Y :: AK. AP. & ſit VL + LK ⊏ AK; erit AR ⊏ AP; vel DR ⊐ DP; adeóque DN ⊐ DI; unde punctum N intra curvam AGB ſemper cadet; ac proinde curva NGN curvam AGB tanget; ſimilique planè diſcurſu curva NGN curvam OGO continget.] Itaque curvæ AGB, OGO ſeſe (æquipollenter) tangunt. Quare cùm recta GS curvam OGO tangat; eadem curvam AGB quoque continget: Q. E. F.

Si curva AEH ſit circuli quadrans, cujus centrum D; erit curva AGB *Quadratrix communis*. Ejus igitur *Tangens* (unà cùm omnium ſimili ratione genitarum tangentibus) hoc pacto deſignatur;

Hujuſmodi:

Hujuſmodi plura quædam cogitaram hîc inſerere, verùm hæc exiſtimo ſufficere ſubindicando modo, juxta quem, citra *Calculi moleſtiam*, *curvarum tangentes* exquirere licet, unáque conſtructiones demonſtrare. Subjiciam tamen unum aut alterum non aſpernanda, ut videtur *Theoremata* perquam generalia.

XI. Sit linea quæpiam Z G E, cujus axis V D; ad quam imprimis applicatæ perpendiculares (V Z, P G, D E) ab initio V Z continuè utcunque creſcant; ſit item linea V I F talis, ut ductâ quâcunq; rectâ E D F ad V D perpendiculari (quæ *curvas* ſecet punctis E, F, ipſam V D in D) ſit ſemper *rectangulum* ex D F, & deſignatâ quâdam R æquale *ſpatio* reſpectivè *interepto* V D E Z; fiat autem D E. D F :: R. D T; & connectatur recta T F, hæc curvam V I F continget. Fig. 109.

Sumatur enim in linea V I F punctum quodpiam I (illud primò ſupra punctum F, verſus initium V) & per hoc ducantur rectæ I G ad V Z, ac K L ad V D parallelæ (quæ lineas expoſitas ſecent, ut vides) éſtque tum L F. L K :: (D F. D T ::) D E. R; adeóque L F × R = L K × D E. Eſt autem (ex præſtituta linearum iſtarum natura) L F × R æquale ſpatio P D E G; ergò L K × D E = P D E G ⊐ D P × D E. Unde eſt L K ⊐ D P; vel L K ⊐ L I. Fig. 110.

Rurſus accipiatur quodvis punctum I, infra punctum F, reliquáq; fiant, utì priùs; ſimiliſque jam planè diſcurſu conſtabit fore L K × D E = P D E G ⊏ D P × D E, unde jam erit L K ⊏ D P, vel L I. E quibus liquidò patet totam rectam T K F K intra (ſeu extra) curvam V I F I exiſtere.

Iiſdem quoad cætera poſitis, ſi *ordinatæ* V Z, P G, D E, *&c.* continuè decreſcant, eadem concluſio ſimili ratiocinio colligetur; unicum obvenit *Diſcrimen*, quòd in hoc caſu (contra quàm in priore) linea V I F concavas ſuas axi V D obvertat.

Corol. Notetur D E × D T æquari ſpatio V D E Z.

XII. Exindè deducitur hoc *Theorema*: Sint duæ lineæ quævis Z G E, V K F ta relatæ, ut ad communem ipſarum axem V D applicatâ quâvis rectâ E D F, ſit ſemper quadratum ex D E æquale *duplo ſpatio* V D E Z; ſumatur autem D Q = D E, & connectatur F Q; hæc curvæ V K F perpendicularis erit. Fig. 111.

Concipiatur enim linea V I F, per F tranſiens, talis qualem mox attigimus (cujus ſcilicet ad V D applicatæ ſe habeant ut ſpatia V D E Z; hoc eſt ut quadrata ex applicatis à curva V K F in præſente hypotheſi) lineámque

lineámque V I F tangat recta F T; item lineam V K F tangat recta F S. Est ergò S D (a) = 2 T D. atqui D E × D T (b) = V D E Z. ergò D E × S D = (2 V D E Z =) F D q. unde constat angulum Q F S rectum esse. quod Propositum erat. (a) 5. Lect. IX. (b) Cor. prec.

Adjungam & illis cognata hæc.

XIII. Sit curva quævis A G E Z, punctúmque quoddam D (à quo projectæ D A, D G, D E, &c. ab initio D A continuò decrescant) tum altera sit curva D K E, priorem intersecans in E, naturâque talis, ut à D utcunque projectâ rectâ D K G (quæ curvam A E Z secet in G, curvam D K E in K) sit perpetuò rectangulum ex D K, & designatâ quâdam lineâ R æquale spatio A D G; tum ductâ D T ad D E perpendiculari, sit D T = 2 R; & connectatur T E; hæc curvam D K E continget. Fig. 112.

Nam sumpto quovis in curva D K E puncto K, ducatur recta D K G, & sumptâ D L = D K, ducatur L R ad D T parallela (secans ipsam D G in Y). tum per E ducatur E X ad D E perpendicularis (hæc verò extra curvam A E Z, ad partes Z cadet, quia decrescunt projectæ versus Z; unde E X versus A intra curvam E G A cadet; extenus saltem, quatenus huic Proposito satisfaciet). Sit jam primò punctum G supra E, versus initium A, & ob T D. D E :: R L. L E; adeóque R L × D E = T D × L E (a) = 2 R × L E (a) = 2 G D E ⊏ 2 D E X = E X × D E. ergò R L ⊏ E X ⊏ L Y. Est autem punctum Y extra curvam, quia D Y ⊏ D L = D K; ergò magis punctum R est extra curvam. Fig. 113. (a) Hyp.

Sit rursus punctum G infra punctum E versus Z; estque rursus, uti priùs, R L × D E = 2 G D E ⊐ 2 triang. E D X = E X × D E. unde R L ⊐ E X ⊐ L Y. Est autem recta L Y extra curvam E K tota, (nam etiam extra arcum L K curvæ K E circumductum tota jacet) ergò punctum R rursus extra curvam existit. Liquidum est igitur rectam T E R curvam D K E tangere.

Quòd si punctum aliud in curva D K E designetur, puta K; per quod ducta sit D K G; & fiat D G. D K :: R. P; sumatúrque D T = 2 P; & connectatur T G; tum ducatur K S ad G T parallela; recta K S curvam D K E tanget.

Nam concipiatur curva D O G, per G transiens, talis, ut rectâ quâcunque D O N à D projectâ (quæ curvam D O G secet in O, curvam D N E in M, curvam A G E in N) sit semper D O × P æqualis spatio A D N; erit ideò D M × R = D O × P; ac proinde D M. D O :: P. R. unde lineæ D K E, D O G analogæ erunt. Verùm

rum ex jam modò oſtenſis G T curvam D O G tangit; ergò K S ipſam D K E continget.

Notetur eſſe D G q . D K q :: 2 R . D S .

Nam eſt D G q . D K q = D G . D K + D G . D K = R . P + D T . D S = R . P + 2 P . D S = 2 R P . P × D S = 2 R . D S . itaque D G q . D K Q :: 2 R . D S.

Hæc autem perinde vera ſunt, nec abſimili modò demonſtrantur; etiam ſi projectæ à D rectæ D A, D G, D E, &c. pares ſint (quo caſu curva A G E Z *Circulus* erit, & *Curva* D K E *Spiralis Archimedea*) aut à D A continuò creſcant.

Exindè verò facilè colligitur hoc *Theorema*:

XIV. Sint duæ curvæ A G E, D K E ità verſus ſe relatæ, ut à deſignato in curva D K E puncto D ductis rectis D A, D G (quarum
Fig. 114. hæc ipſam D K E ſecet in K) ſit ſemper *Quadratum* ex D K *Quadruplum ſpatii* A D G; ductâ D H ad D G perpendiculari, & facto D K . D G :: D G . D H; connexâque H K; erit H K curvæ D K E perpendicularis.

Nam concipiatur linea D O K O, per K tranſiens, naturâque talis ut ad illam à D projectæ (ceu D K) ſe habeant in eadem quâ ſpatia A D G ratione (quales lineas attigimus in proximè ſuperiori) & lineam D O K tangat recta K T, lineam D K E recta K S; conveniant âutem hæ cum ipſa H D punctis T, S; eſt igitur (è præcedente) D G q . D K q :: $\frac{DK}{2}$. D T . hoc eſt D H . D K :: $\frac{DK}{2}$ D T; hoc eſt (quo-
* *Lu 12. hujus.* niam è * mox præmonſtratis D S = 2 D T) D H . D K :: ($\frac{DK}{2}$. $\frac{DS}{2}$ ::) D K . D S. Liquet igitur rectam H K tangenti K S perpendicularem eſſe: Q. E. D.

Ità Propoſiti noſtri priore (quam innuebamus) parte quomodocunque defuncti ſumus. Cui ſupplendæ, appendiculæ inſtar, ſubnectemus à nobis uſitatum methodum ex Calculo tangentes reperiendi. Quanquam haud ſcio, poſt tot ejuſmodi pervulgatas atque protritas methodos, an id ex uſu ſit facere. Facio ſaltem ex Amici conſilio; eóque libentiùs, quòd præ cæteris, quas tractavi, compendioſa videtur, ac generalis. In hunc procedo modum.

Sint A P, P M poſitione datæ rectæ lineæ (quarum P M propoſitam curvam ſecet in M) & M T curvam tangere ponatur ad M, rectam

rectam AP secare ad T, ut ipsius jam rectæ PT quantitatem exquiram; curvæ arcum MN indefinitè parvum statuo; tum duco rectas NQ ad MP, & NR ad AP parallelas, nominò MP = *m*, PT = *t*; MR = *a*; NR = *e*; reliquásque rectas, ex speciali curvæ natura determinatas, utiles propositо, nominibus designo; ipsas autem MR, NR (& mediantibus illis ipsas MP, PT) per *æquationem* è Calculo deprehensam inter se comparo; regulas interim has observans. 1. Inter computandum omnes abjicio terminos, in quibus ipsarum *a*, vel *e* potestas habetur, vel in quibus ipsæ ducuntur in se (etenim isti termini nihil valebunt). Fig. 115.

2. Post *æquationem constitutam*, omnes abjicio terminos, literis constantes quantitates notas, seu determinatas designantibus; aut in quibus non habentur *a*, vel *e*; (etenim illi termini semper, ad unam æquationis partem adducti, nihilum adæquabunt).

3. Pro *a* ipsam *m*; (vel MP) pro *e* ipsam *t* (vel *PT*) substituo. Hinc demum ipsius PT quantitas dignoscetur.

Quod si calculum ingrediatur curvæ cujuspiam indefinita particula; substituatur ejus loco tangentis particula ritè sumpta, vel ei quævis (ob indefinitam curvæ parvitatem) æquipollens recta.

Hæc autem è subnexis Exemplis clarius elucescent.

Exemp. I.

Angulus ABH rectus sit, & sit curva AMO talis, ut per A ductâ utcunque rectâ AK, quæ rectam BH secet in K, curvam AMO in M, sit semper subtensa AM æqualis abscissæ BK; hujus curvæ ad M tangens est designanda. Fig. 116.

Fiant quæ suprà præscripta sunt, & (ductâ ANL) nominetur AB = *r*; & AP = *q*; unde AQ = *q* — *e*; item QN = *m* — *a*. ergò est $qq + ee - 2qe + mm + aa - 2ma$ = (AQq + QNq = ANq =) BLq; hoc est (rejectis, uti monitum est, rejiciendis) $qq - 2qe + mm - 2ma$ = BLq. Porrò est AQ. QN :: AB. BL; hoc est $q - e . m - a :: r . BL = \frac{rm - ra}{q - e}$. quare $\frac{rrmm + rraa - 2rrma}{qq + ee - 2qe.}$ = BLq, seu (rejectis superfluis) $\frac{rrmm - 2rrma}{qq - 2qe}$ = BLq = $qq - 2qe + mm - 2ma$. vel $rrmm - 2rrma = q^4 - 2q^3e + qqmm - 2qqma - 2q^3e + 4qqee - 2qmme + 4qmae$; hoc est (abjectis iis, quæ præscripsimus

abjicienda) $-2rrmx=-4q^3t-2qqmx-2qmmt$. vel $rrmx-qqmx=2q^3t+qmmt$, vel denuò ſubſtituendo m pro x, & t pro t, eſt $rrmm-qqmm=2q^3t-qmmt$, vel $\frac{rrmm-qqmm}{2q^3-qmm}=t=PT$.

Exemp. II.

Fig. 117. Sit recta EA (poſitione ac magnitudine data) & curva EMO proprietate talis, ut ab ea utcunque ductâ rectâ MP ad EA perpendiculari *Summa Cuborum* ex AP, & MP æquetur *Cubo* rectæ AE.

Nominentur $AE=r$, $AP=f$, unde $AQ=f+t$; & AQ cub. $=f^3+3ffe+3fet+t^3$, (ſeu abjectis ſuperfluis, ex præſcripto) $=f^3+3ffe$. Item NQ cub. $=$ cub. $m-x=m^3-3mmx+3mxx-x^3$ (hoc eſt) $=m^3-3mmx$. Quapropter eſt $f^3+3ffe+m^3-3mmx=$ (AQ cub. $+$ NQ cub. $=$ AE cub. $=$) r^3. abjectiſque datis, eſt $3ffe=3mmx=o$. ſeu, $ffe=mmx$, ſubrogatiſque loco x, & e ipſis m, & t, erit $fft=m^3$; ſeu $t=\frac{m^3}{ff}$; eſt ergò PT quarta proportionalis in ratione AP ad PM continuata.

Similiter, Si fuerit $APqq+MPqq=AEqq$; reperietur fore $PT=\frac{m^4}{f^3}$; vel PM quarta proportionalis in ratione AP ad PM; ac ita porrò; quod de *Cycloformibus* iſtis lineis an obſervatu dignum ſit neſcio.

Exemp. III.

Fig. 118. *La Galande* Poſitione data ſit recta AZ, & AX magnitudine; ſit etiam *curva* AMO talis, ut ductâ utcunque rectâ MP ad AZ normali, ſit AP *cub.* $+$ PM *cub.* $=$ AX $\times$ AP $\times$ PM.

Dicantur $AX=b$; & $AP=f$; ergò $AQ=f+e$; & AQ *cub.* $=f^3-3ffe$; & QN *cub.* $=m^3-3mmx$. & $AQ\times QN=fm-fx-me+xe=fm-fx-me$; unde $AX\times AQ\times QN=bfm-bfx-bme$; hinc æquatio $f^3-3ffe+m^3-3mmx=bfm-bfx-bme$; ſeu amoliendo rejectanea

ctanea, $bfa - 3mma = 3ffe - bme$; ſubſtituendóque $bfm - 3m^3 = 3fft - bmt$; ſeu, $\frac{bfm - 3m^3}{3ff - bm} = t$.

Exemp. IV.

Sit *Quadratrix* CMV (ad circulum CEB pertinens cui centrum A,) cujus axis VA; ordinatæ CA. MP ad VA perpendiculares.

Protractis rectis AME, ANF, ductiſque rectis EK, FL ad AB perpendicularibus, dicantur arcus CB = p; radius AC = r; recta AP = f, AM = k. Eſtque jam CA arc. CB :: NR. arc. FE. hoc eſt, $r.p :: a.\frac{pa}{r}$ = arc. FE. & AM. MP :: AE. EK; hoc eſt, $k.m :: r.\frac{rm}{k}$ = EK; item AE. EK :: arc. FE. LK. hoc eſt $r.\frac{rm}{k} :: p.\frac{pa}{r}.\frac{pma}{rk}$ = LK. Verùm AM. AE :: AP. AK; hoc eſt $k.r :: f.\frac{rf}{k}$ = AK. ergò $\frac{rf}{k} - \frac{pma}{rk}$ = AL. Et $\frac{rrff}{kk} - \frac{2fmpa}{kk}$ (abjectis ſuperfluis) = AL q; adeóque LF q = $\frac{rrkk - rrff + 2fmpa}{kk} = \frac{rrmm + 2fmpa}{kk}$. Fig. 119.

Eſt autem AQ q. QN q :: AL q. LF q; hoc eſt $Q.f + e.Q.m + a$ :: AL q. LF q. hoc eſt $ff - 2fe.mm + 2ma :: rrff - 2fmpa.rrmm + 2fmpa$. Unde (ſublatis ex norma rejectaneis) emerget *æquatio*, $ffpa + mmpa - rrfa = rrme$; ſeu $kkpa - rrfa = rrme$; vel ſubſtituendo juxta *præſcriptum*, $kkpm - rrfm = rrmt$; vel $\frac{kkp}{rr} - f = t$. Hinc colligitur eſſe rectam AT = $\frac{kk}{rr}p$; hoc eſt (quoniam, ut notum eſt, AV = $\frac{rr}{p}$) erit AT = $\frac{AMq}{AV}$; ſeu, AV. AM :: AM. AT.

Exemp. V.

Fig. 120, 121.

Sit DEB *Quadrans Circuli*, quem tangat recta BX; tum linea AMO talis, ut in recta AV utcunque sumptâ AP, quæ arcum BE adæquet, erectâque PM ad AV normali, sit PM æqualis arcûs BE tangenti BG.

Sumpto arcu BE = AQ; & ductâ CFH, demissis EK, FL ad CB normalibus; nominentur CB = r. CK = f: KE = g. Et quoniam est CE. EK :: arc. BEA. LK, vel CE. EK :: QF. LK, hoc est $r . g :: f . \frac{ge}{r}$ = LK; erit CL = $f + \frac{ge}{r}$. Et LF = $\sqrt{rr - ff - \frac{2fge}{r} - gg} = \sqrt{gg - \frac{2fgr}{r}}$.

Est autem CL. LF :: (CB. BH ::) CB. QN. hoc est, $f + \frac{ge}{r} \sqrt{gg - \frac{2fge}{r}} :: r . m - a$. vel (quadrando) $ff + \frac{2fge}{r} gg - \frac{2fge}{r} :: rr . mm - 2ma$. Unde (dimissis quæ oportet) obtinetur æquatio, $rfma = grre + gmme$. unde substituendo, est $rfmm = grrt + gmmt$. vel $\frac{rfmm}{grr + gmm} = t$. seu (quoniam est $m = \frac{rr}{f}$) erit $t = \frac{rr}{rr + mm} m = \frac{CB_q}{CG_q} BG = \frac{CK_q}{CE_q} BG$.

Hæc sufficere videntur huic methodo elucidandæ.

LECT. XI.

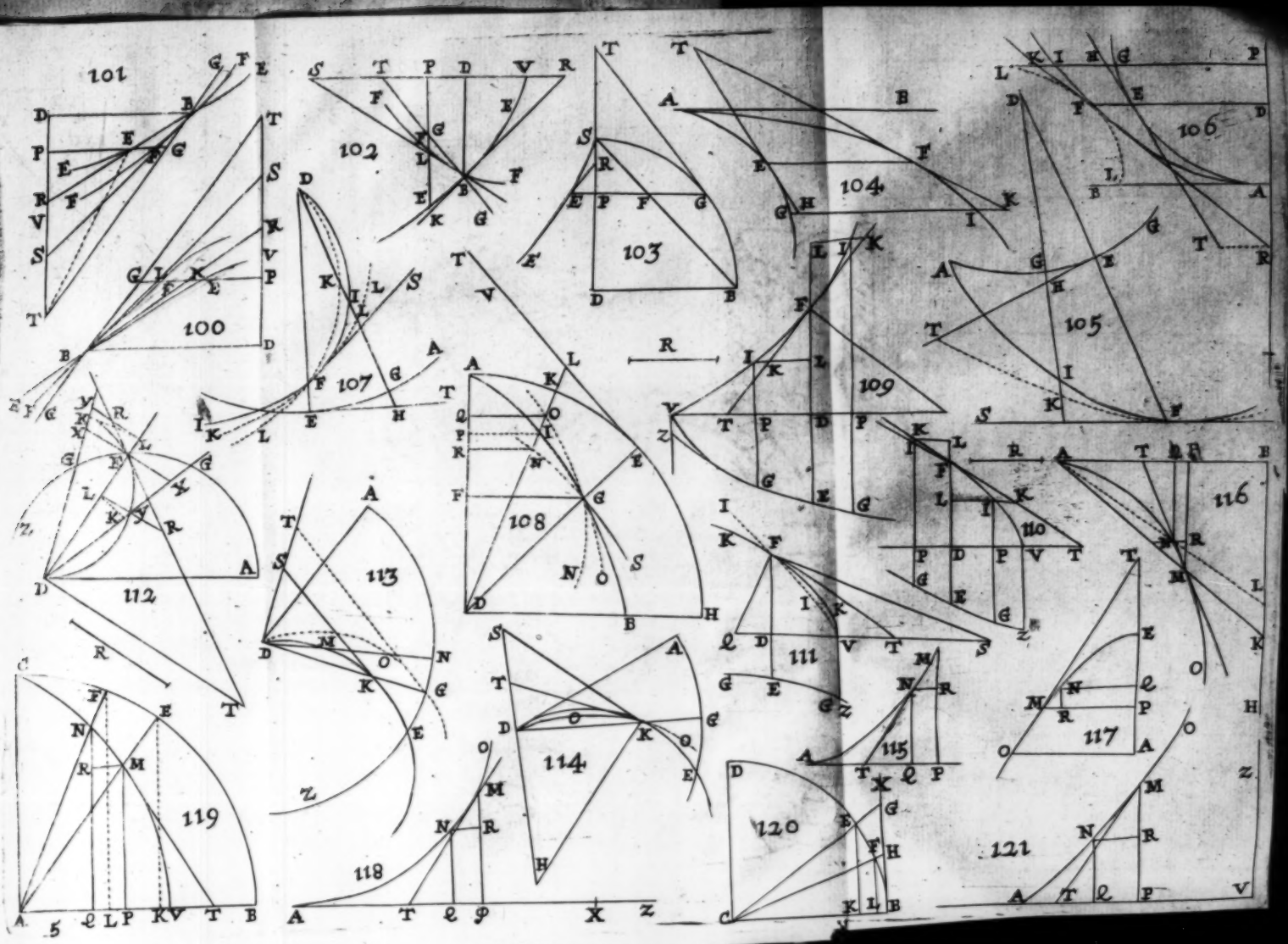
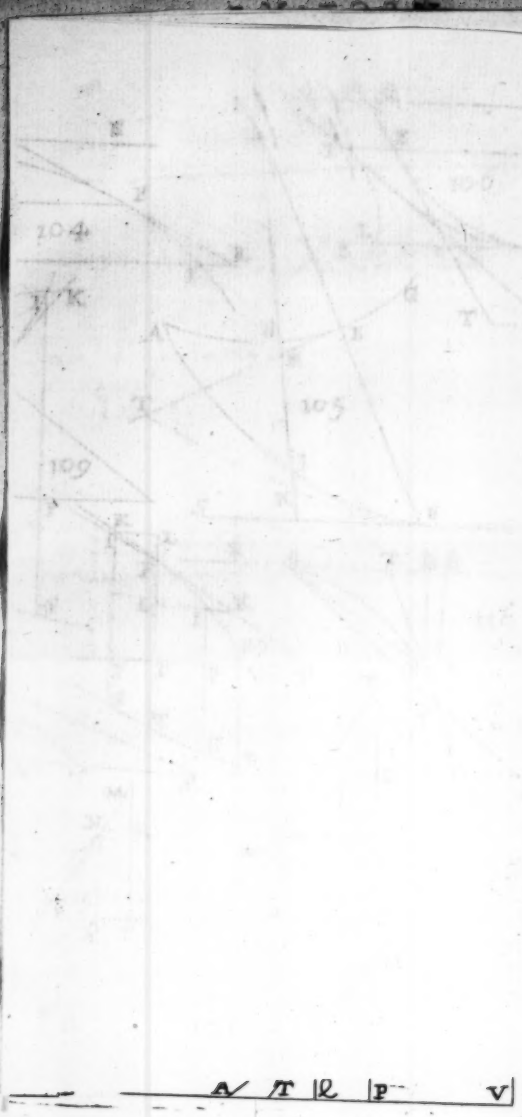

101
100
102
103
104
105
106
107
108
109
110
111
112
113
114
115
116
117
118
119
120
121

Fig. 120, 121.



Lect. XI.

Reliquis utcunque patratis, apponemus iam *quæ ad magnitudinum è tangentibus* (seu è perpendicularibus ad curvas) *Dimensiones eliciendas pertinentia se obtulerunt Theoremata*; de compluribus utiq; selectiora quædam.

I. Sit curva quæpiam V H (cujus axis V D, applicata H D ad V D normalis) item linea ⌀ Z ↓ talis, ut si à curvæ puncto liberè sumpto (putaE) ducatur recta EP ad curvam perpendicularis, & recta EAZ ad axem perpendicularis, sit recta AZ interceptæ A P æqualis; erit *spatium* A D ↓ ⌀ *æquale semissi quadrati ex recta* D H. Fig. 122.

Nam sit angulus H D O semirectus, & æquisecetur recta V D indefinitè punctis A, B, C; per quæ ducantur rectæ E A Z, F B Z, G C Z, ad H D parallelæ; curvæ occurrentes in E, F, G; à quibus rectæ E I Y, F K Y, G L Y ad V D (vel H O) parallelæ ducantur; quin & rectæ E P, F P, G P, H P curvæ V H perpendiculares sint; lineæ verò se intersecent, ut vides. Estque triangulum H L G simile triangulo P D H (nam ob indefinitam sectionem curvula G H pro rectâ haberi potest) quare H L . L G :: P D . D H. adeóque H L × D H = L G × P D; hoc est H L × H O = D C × D ↓. Similiter monstratur discursu, quoniam triangulum G M F triangulo P C G assimilatur, fore L K × L Y = C B × C Z; & similiter K I × K Y = B A × B Z; itidem denuò I D × I Y = A V × A Z; unde constat triangulum H D O (quod à rectangulis H L × H O + L K × L Y + K I × K Y + I D × I Y minimè differt) æquari spatio V D ↓ ⌀ (quod itidem à rectangulis D C × D ↓ + C B × C Z + B A × B Z + A V × A Z minimè differt); hoc est $\frac{DHq.}{2}$ æquari spatio V D ↓ ⌀.

Longior discursus apagogicus adhiberi posset, at quorsum?

II Iisdem

II. Iisdem positis, atque paratis; *summa rectangulorum* $AZ \times AE + BZ \times BF + CZ \times CG$, *&c.* æquatur *trienti cubi* ex basi DH.

Fig. 122.

Nam ob $HL.LG::PD.DH::PD \times DH.DHq$, erit $HL \times DHq = LG \times PD \times DH$. hoc est $HL \times HOq = DC \times D\downarrow\varphi \times DH$. Similique discursu, $LK \times LYq = CB \times CZ \times CG$. & $KI \times KYq = BA \times BZ \times BF$, *&c.* Verùm $HL \times HOq + LK \times LYq + KI \times KYq$, *&c.* adæquant trientem cubi ex DH; itaque liquet Propositum.

III. Simili ratione constabit summam $AZ \times AEq + BZ \times BFq + CZ \times CGq$, *&c.* æquari $\tau\varphi\frac{DHqq}{4}$ & esse summam $AZ \times AE$ cub. $+ BZ \times BE$ cub. $+ CZ \times CG$ cub. *&c.* $= \frac{DH^2}{5}$; ac eodem in continuum tenore.

IV. Exhinc consectantur haud aspernanda *Theoremata*: Sit $VD\downarrow\varphi$ spatium quodlibet, cujus axis VD, ut dictum, æquisectus; si concipiantur singula spatia $VAZ\varphi$, $VBZ\varphi$, $VCZ\varphi$, *&c.* in suas ordinatas AZ, BZ, CZ, *&c.* respectivè singulas duci, quæ proveniet summa adæquabitur ipsius spatii $VD\downarrow\varphi$ semiquadrato.

Fig. 122.

Nam (uti priùs ostensum) figuræ $VD\downarrow\varphi$ adaptari potest spatium VDH, tale nimirum, ut ductâ quâvis ad curvam VH perpendiculari, ceu EP, sit AP sibi respondenti applicatæ AZ æqualis; (*b*) unde fiet spatium $VAZ\varphi = \frac{AEq}{2}$, & $VBZ\varphi = \frac{BFq}{2}$ & $VCZ\varphi = \frac{CGq}{2}$ *&c.* quapropter omnia $VAZ\varphi \times AZ + VBZ\varphi \times BZ + VCZ\varphi \times CZ$, *&c.* æquabuntur omnibus $\frac{AEq \times AZ + BFq \times BZ + CGq \times CZ}{2}$

Præced. Lect. X.
(*b*) 1 *hujus.*
Fig. 122.

(*c*) hoc est $\tau\varphi\frac{DHqq}{4 \times 2}$; (*b*) hoc est $\tau\varphi\frac{VD\downarrow\varphi \times VD\downarrow\varphi}{2}$.

(*c*) 3 *hujus.*

V. Quòd si ducantur omnia $\sqrt{VAZ\varphi}$, $\sqrt{VBZ\varphi}$, $\sqrt{VCZ\varphi}$, *&c.* in suas applicatas AZ, BZ, CZ, *&c.* respectivè proveniet aggregatum æquale duabus tertiis radicis quadratæ facti ex ipso spatio $VD\downarrow\varphi$ cubato ($\tau\varphi^{\frac{2}{3}}\sqrt{VD\downarrow\varphi^{\frac{3}{2}}}$)

Nam adaptatâ curvâ VH, est $\sqrt{VAZ\varphi} = AE\sqrt{\frac{1}{2}}$; & $\sqrt{VBZ\varphi} = BF\sqrt{\frac{1}{2}}$, & $VCZ\varphi = \sqrt{CG}\sqrt{\frac{1}{2}}$, *&c.* Cùm itaque sint omnia

omnia $AZ \times AE + BZ \times BF + CZ \times CG$, &c. $= \frac{DH\ cub.}{3}$ erunt omnia $AZ \times \sqrt{VAZ_{\varphi}} + BZ \times \sqrt{VBZ_{\varphi}} + CZ \times \sqrt{VCZ_{\varphi}}$, &c. $= \frac{DH\ cub}{3}\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{DH^6}{18}}$. Est autem $DHq = 2VD \downarrow \varphi$, vel $DH^6 = 8VD \downarrow \varphi^3$; quapropter omnia $AZ \times \sqrt{VAZ_{\varphi}} + BZ \times \sqrt{VBZ_{\varphi}} + CZ \times \sqrt{VCZ_{\varphi}}$, &c. $= \sqrt{\frac{8}{18}} VD \downarrow \varphi^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}\sqrt{VD \downarrow \varphi^3}$.

VI. *Exempla.* Sit $VD \downarrow$ circuli quadrans (cujus radius dicatur R, & Peripheria P) segmenta VAZ, VBZ, VCZ, &c. in sinus rectos AZ, BZ, CZ, &c. ducta conficient $\frac{RqPq}{8}$. Fig. 123.

Item Summa $AZ\sqrt{VAZ} + BZ\sqrt{VBZ} + CZ\sqrt{VCZ}$, &c. $= \frac{2}{5}\sqrt{\frac{R^3P^3}{8}} = \sqrt{\frac{R^3P^3}{180}}$

Si $VD \downarrow$ sit parabolæ segmentum, factum è segmentis in applicatas erit $\frac{2}{9} VDq \times A \downarrow q$; ac è radicibus segmentorum in applicatas factum erit $\frac{2}{7}\sqrt{\frac{2}{567}} VD^3 \times D \downarrow^3 \sqrt{\frac{12}{343}} VD^3 \times D \downarrow^3$.

Similia plura de factis è *Segmentorum potestatibus, aut radicibus aliis in applicatas, aut sinus ductis*, hinc extundi possent.

VII. E dictis porrò sequitur, si omnes (vertici, & perpendicularibus interjectæ) VP per respectiva puncta A, B, C, &c. Concipiantur applicatæ, puta ut AY, BY, CY, &c. respectivis VP æquentur; erit è sic applicatis *constitutum spatium* AD ξ θ *æquale semisse quadrati ex subtensa* VH.

Nam, ob omnes $VA + VB + VC$, &c. $= \frac{VDq}{2}$ & omnes $AP + BP + CP$ &c. $= \frac{DHq}{2}$, liquet fore omnes $VP = \frac{VHq}{2}$.

VIII. Porrò, si (positis iisdem) sit curva RXXS talis, ut sit IX $= AP$, & $KX = BP$; & $LX = CP$, &c. erit *solidum factum ex spatio*

ſpatio V D ↓ *q circa axem* V D *rotato ſubduplum ſolidi ex ſpatio* D R S H, *itidem circa axem* V D *rotato, confecti.*

Nam ob H L. L G :: P D. D H :: D ↓. D H :: D ↓ *q*. D ↓ × D H :: D ↓ *q*. H S × D H, erit H L × H S × D H = L G × D ↓ *q*. = D C × D ↓ *q*. Simili planè diſcurſu erit L K × L X × D L = C B × C Z *q*; & K I × K X × D K = B A × B Z *q*, &c. atqui ſolidum prius eſt $\frac{\overline{\text{2}}}{3}$: A Z *q* + B Z *q* + C Z *q*, &c. & ſolidum poſterius eſt $\frac{\text{2}}{3}$: D I × I X + D K × K X + D L × L X, &c. itaque conſtat Propoſitum.

Fig. 124. IX. Hæc itidem omnia ſimili ratione vera ſunt, etiam ſi curva V E H rectæ V D convexas ſuas partes obvertat; nempe quovis in curva accepto puncto E; & per hoc ducta E P ad curvam V E H perpendiculari, & E A Y ad rectam V D normali, factáque A Z = A P; erit ſpatium V D ↓ = $\frac{\text{D H } q}{2}$ Sin quoque fiat A Y = V P; erit ſpatium V D ξ = $\frac{\text{V H } q}{2}$. Et pariter quoad cætera.

Ex his verò *Theorematis quam innumerarum magnitudinum* (ex ipſarum immediatè conſtructione) *dimenſiones innoteſcant*, ab experientia facilè comperietur.

Fig. 125. X. Sit rurſus curva quæpiam V H (cujus axis V D, baſis D H) & linea D Z Z O talis, ut à curvæ puncto quopiam, ceu E, ducta rectâ E T, quæ curvam tangat, & recta E I Z ad baſin parallelâ, ſit perpetuò I Z æqualis ipſi A T; dico *ſpatium* D H O *ſpatio* V D H *æquari.*

Æquiſecetur enim recta D H indefinitè, punctis I, K, L, per quæ ducantur rectæ E I Z, F K Z, G L Z ad V D parallelæ, curvæque occurrentes ad E, F, G, unde ducantur rectæ E A, F B, G C ad H D parallelæ, rectæque E T, F T, G T (ut & H T) *curvam tangentes*; lineæ verò ſe, ut Schema monſtrat, interſecent. Eſtque jam triangulum G L H ſimile triangulo T D H (nam ob diviſionem iſtam indefinitam arculus G H rectæ inſtar cenſeri poteſt, eatenus tangenti H T coincidens) quare L G. L H :: T D. D H; & L G × D H = L H × T D; ſeu C D × D H = L H × H O. ſimili ratiocinio eſt B C ×

C G

CG=KL×LZ; & AB×BF=IK×KZ, & VA×AE=DI×IZ. Verùm ſumma CD×DH+BC×CG+AB×BF+VA×AE à ſpatio VDH minimè differt; & ſumma LH×DO+KL×LZ+IK×KZ+DI×IZ à ſpatio DHO minimè differt. itaque ſpatio VDH, DHO æquantur.

Hoc *perutile Theorema* doctiſſimo Viro *D. Gregorio Aberdonenſi* debetur; cui ſequentia ſubnectimus.

XI. Iiſdem poſitis; ſolidum ex ſpatio DHO circà axem VDR rotato factum duplum erit ſolidi facti ex ſpatio VDH itidem circà axem VD rotato. Fig. 125.

Nam eſt HL. LG:: (DH. DT:: DH. HO::) DHq. DH×HO. unde HL×DH×HO=LG×DHq=CD×DHq. Similique diſcurſu ſunt LK×DL×LZ=BC×CGq. & KI×DK×KZ=AB×BFq. & demum ID×DI×IZ=VA×AEq. Eſt autem (ut vulgò notatum habetur) ſumma CD×DHq+BCB×CGq+AB×BFq+VA×AEq dupla ſummæ DI×IE+DK×KF+DL×LG, *&c.* Quare ſolidum ex ſpatio HDO circà axem DR converſo factum duplum eſt ſolidi, quod è ſpatio VDH circà VD converſo producitur.

XII. Hinc, ſumma DI×IZ+DK×KZ+DL×LZ, &c. æquatur ſummæ quadratorum ex applicatis ad VD, ſcilicet ipſis AEq+BFq+CGq, &c.

XIII. Simili ratiocinio conſtabit ſummam DIq×IZ+DKq×KZ+DLq×LZ, &c. triplam eſſe ſummæ DIq×IE+DKq×KF+DLq×LG, &c. hoc eſt æqualem ſummæ cuborum ab omnibus AE, BF, CG, &c. ad VD applicatis. Idem quoad *reliquas poteſtates* obſervabilis eſt Concluſionum tenor.

XIV. Iiſdem poſitis; ſi DXH ſit linea talis, ut quævis ad DH ordinata, ceu IX, ſit media proportionalis inter ſibi congruas ordinatas IE, IZ; erit ſolidum ex ſpatio VDH circà axem DH rotato duplum ſolidi ex ſpatio DXH circà eundem axem DH converſo procreati.

Nam ob VA×AE=DI×IZ, erit VA×AE×EI=DI×IZ×IE=ID×IXq. Similique de cauſa AB×BF×FK=IK×KXq; & BC×CG×GL=KL×LXq, &c. Eſt autem ſumma VA×AE×EI+AB×BF×FK+BC×CG×GL, &c. Subdupla ſum- *In 10. hujus.*

æq. VDq + EIq + FKq + GLq, ergò summa IXq + KXq + LXq + HXq, subdupla est summæ VDq + EIq + FKq + GLq. Unde liquet Propositum.

XV. Quod si curva DXH talis concipiatur, ut sit ordinata quæpiam, ceu IX, inter congruas ordinatas IE, IZ bimedia *, erit summa cuborum ex IX, KX, LX, &c. subtripla cuborum ex DV, IE, KF, &c. Sin IX sit trimed.* erit $IXqq + KXqq + LXqq, \&c. = \frac{DVqq + IEqq + KFqq}{4}$ &c. ac ità porrò quoad cæteras potestates. * *Not.* bimediam appello, quæ duarum mediarum proportionalium prima; trimediam, quæ trium prima est, &c.

Hæc simili ratione colliguntur, ac comprobantur. piget κοπρολογειν.

XVI. Sit porrò linea VYQ talis, ut ordinata AY ipsi AT, & ordinata BY ipsi BT, &c. æquentur; erit IZq + KZq + LZq, &c. (summa quadratorum ex ordinatis à curva DZO ad rectam DH) æqualis summæ VA × AE × AY + AB × BF × BY + BC × CG × CY, &c. (hoc est figuræ VDH in figuram VDQ ductæ).

XVII. Item, summa IZ. cub. + KZ cub. + LZ cub. &c. = VA × AE × AYq + AB × BE × BYq + BC × CG × CYq, &c. *hoc est figuræ* VDH *in figuræ* VDQ *quadrata ductæ*). Similis & aliarum *potestatum* est ratio.

Ad superiorum normam hæc facilè colliges.

XVIII. Eadem vera sunt, & omninò simili ratione comprobantur, Fig. 126. Etiam si curvæ VH convexa rectæ VD obvertantur. Nempe, si linea DZO talis sit, ut ductâ per quodvis in curva VH punctum E tangente ET, & EA ad HD parallelâ, ac EIZ ad VD parallelâ, sit perpetim IZ = AT, erit spatium DHO spatio VDH æquale, & solidum factum ex spatio DHO circa axem VR conversò duplum erit solidi ex spatio VDH circa eundem axem VD rotato producti. quin & reliqua pari modo convenient.

XIX. Porrò, sit curva quæpiam AMB, cujus axis AD, & huic perpendicularis BD; tum alia sit linea KZL talis, ut sumpto in curva AB utcunque puncto M; & per hoc ductis rectâ MT curvam AB tangente, rectâ MFZ ad DB parallelâ (quæ lineam KL secet in Z, rectam AD in F) datâque quâdam lineâ R; sit TF. FM :: R.

R. FZ, erit ſpatium ADLK æquale rectangulo ex R, & DB.

Nam ſit DH = R, & compleatur rectangulum BDHI; tum aſſumptâ MN indefinitè parvâ curvæ AB particulâ ducantur NG ad BD, & MEX, NOS ad AD parallelæ. Eſtque NO. MO :: TF. FM :: R. FZ. Unde NO × FZ = MO × R, hoc eſt FG × FZ = ES × EX. ergò cum omnia rectangula FG × FZ minimè differant à ſpatio ADLK, & omnia totidem rectangula ES × EX componant rectangulum DHIB, ſatis liquet Propoſitum.

XX. Iiſdem poſitis, ſit curva PYQ talis, ut ſumpta in ſumpta recta MX ordinata EY (reſpectivæ) ipſi FZ æquetur, erit *ſumma quadratorum* ex FZ (ad rectam AD compurata) par ei quod fit ex ipſa R in *ſpatium* DBQB ducta.

Eſt enim FG. ES :: NO. MO :: R × FZ. FZq :: R × EY. FZq. adeóque FG × FZq = ES × R × EY.

XXI. Simili ratione *ſumma Cuborum* ex FZ æquatur ei quod fit ex R in ſummam quadratorum ex rectis EY ad BD applicatis. neque non ſimili quoad reliquas poteſtates tenore.

Fig. 128.

XXII. Sit curva quævis DOK, in qua deſignatum punctum D, & ſubtenſa recta DK, ſit item curva AE talis, ut à D projectâ quâvis rectâ DMF (quæ curvas ſecet punctis M, F) ductiſque DS ad DM normali, & MS curvam DOK tangente (concurrentibus utiq; puncto S) datâque quâdam R, ſit DS. 2R :: DMq. DFq, erit ſpatium ADE æquale ex R, DK.

Nam ſubtenſa DK indefinitè ſecta concipiatur punctis PQ, &c. per quæ centro C deſcripti tranſeant arcus PM, QRN, curvam DOK ſecantes punctis M, N; per quæ ducantur rectæ DMF, DNG, ſint verò DT ad DK; & DS ad DM perpendiculares, quibus occurrant tangentes KT, MS. demùm centro D per E ducatur arcus EX, & per F arcus FY. Jam, ob ſectionem indefinitam, eſt triangulum KPM triangulo KDT ſimile. ac ideò MP. PK :: TD. DK. item eſt DP. PM :: DE. EX. ſeu, propter aſſignatam cauſam, DK. MP :: DE. EX. Eſt itaque MP × DK. PK × MP :: TD × DE. DK × EX. hoc eſt DK. PK :: TD × DEq. DK × EX × DE. ac inde DKq × EX × DE = PK × TD × DEq. (a) Eſt autem DT. 2R :: DKq. DEq, ſeu DT × DEq = 2R × DKq. ergò eſt DKq × EX × DE = PK × 2R × DKq. quare EX × DE = 2R × PK, hoc eſt, 2 ſector DEX = 2R × PK. unde ſector DEX = R × PK. Simili planè diſcurſu ſector DFY (a) *Hyp.*

æquatur ipsi R × RM, vel R × QP. itaque totum spatium ADE quod ab ejusmodi sectoribus minimè differt adæquatur toti R × DK. quod erat Propositum.

Fig. 128. XXIII. Iisdem, quoad cætera, positis atque paratis, ducantur KH ad KT, & MI ad MS perpendiculares, & concipiatur jam curva AE naturâ talis, ut sit $DE = \sqrt{DK \times DH}$; & $DF = \sqrt{DM \times DI}$, ac ità perpetuò; erit spatium ADE quadrati ex DK subquadruplum.

Nam est MP. PK :: DK. DH :: DKq. DK × DH :: DKq. DEq. item DP. PM :: DE. EX, hoc est DK. PM :: DE. EX. ergò MP × DK. PK × PM :: DKq × DE. DEq × EX. hoc est DK. PK :: DKq. DE × EX. vel DKq. DK × PK :: DKq. DE × EX, unde DK × PK = DE × EX. Simili ratione DM × MR (vel DP × PQ) = DF × FY. Verùm omnia DK × PK, DP × PQ, &c. æquantur semissi quadrati ex DK; & omnia DE × EX, DF × FY, &c æquantur *duplo spatio* EDA; unde manifestè consequitur Propositum.

Fig. 129. XXIV. Sit curva quæpiam DOK, in qua punctum D, cuique subtendatur recta DK, sit item curva DZI talis, ut sumpto in curva DOK puncto quopiam M, connexâque DM; & ductâ DS ad DM perpendiculari, & MS curvam DOK tangente; sumptâ demum DP = DM, & ductâ PZ ad DK perpendiculari, sit PZ = DS; erit *spatium* DKI æquale *duplo spatio* DKOD.

Nam recta KP concipiatur indefinitè parva; & DT ipsi DK perpendicularis sit, & KT curvam DOK tangat. Est itaque (ducto arcu MP) rursus KP. PM :: KD. DT :: KD. KI. unde KP × KI = PM × KD. Capiatur alia particula PQ, & centro D per Q ducatur arcus QN, quem secet subtensa DM in R; est ergò rursus MR. RN :: MD. DS; hoc est PQ. RN :: MD. PZ quare PQ × PZ = RN × MD; ac ità continuò deinceps. patet igitur omnia simul rectangula KP × KI, PQ × PZ, &c. æquari aggregato omnium PM × KD, RN × MD, &c. hoc est spatium DKI duplo spatio DKOD æquari.

Fig. 130. XXV. Iisdem quoad cætera positis atque paratis, ordinatæ PZ jam æquales concipiantur ipsis MS respectivis; & ad rectam assumptam X*k*, distantiasque X*k*, X*m*, X*n*, &c, æquales ipsis curvæ partibus DOK, DOM, DON, &c. applicentur rectæ *k d*, *m d*, *n d*, &c.

pares

pares ſubtenſis KD, MD, ND; &c. erit ſpatium X*k d* æquale ſpatio DKI.

Nam eſt KM. KP:: KT. KD; hoc eſt *k m*. KP:: KI. *k d*. unde *k m* × *k d* = KP × KL. Similique pacto, MN. MR:: MS. MD. ſeu *m n*. PQ:: PZ. *m d*. unde *m n* × *m d* = PQ × PZ. ac ità deinceps. unde conſtat Propoſitum.

XXVI. Sin porrò, perſiſtentibus reliquis, adſumptâ quâvis rectâ. *k g*, completoque rectangulo X*k g h*, curva DZI talis intelligatur, ut ſit MD. MS:: *k g*. PZ; erit rectangulum X*k g h* æquale ſpatio DKI. Fig. 130.

Nam eſt rurſus KP. KM:: KD. KT:: *k g*. KI. adeóque KP × KI = (KM × *k g* =) *k m* × *k g*. Similitérque PQ × PZ = *m n* × *k g*. ac ità ſemper. Unde conſtat.

Hinc noto ſpatio DKI cognoſcetur quantitas curvæ DOK.

Hujuſmodi verò complura deprehendet quiſquis hanc *Mineram* penitiùs explorârit, ac excuſſerit. Faciat cui id vacat & adlubeſcit.

XXVII. Uſui fortè nonnunquam erit (mihi ſubinde fuit) & hoc, è præmiſſis deductum Theorema. Fig. 131.

Sit curva quæpiam VEH (cujus axis VD, baſis DH) quam tangat utcunque recta ET, & ducatur EA ad HD parallela. tum altera ſtatuatur curva GZZ talis, ut à puncto E ductâ rectâ EZ ad VD parallelâ (quæ baſin DH in I, curvam GZZ in Z ſecet) adſumptâq; quâpiam determinatâ R, ſit ſemper DAq. Rq:: DT. IZ; erit DA. AE:: Rq. ſpat. DIZG. (vel facto DA. R:: R. DP; ductâque P Q ad DH parallelâ, erit *Rectangulum* DPQI par *ſpatio* DGZI).

Etiam hoc adjiciatur *Theorema*; nonnunquam uſui futurum.

XXVIII. Sit curva quælibet AMB (cujus axis AD); ſit item linea KZL proprietate talis, ut ſumpto in AMB quocunque puncto M, & ab eo ductis rectâ MP ad curvam AB perpendiculari (quæ axem AD ſecet in P), & rectâ MG ad AD perpendiculari (quæ curvam KZL ſecet in Z) ſit conſtantèr GM. MP:: arc. AM. GZ; erit *ſpatium* ADKL æquale *ſemiſſi quadrati* ex arcu AM. Fig. 132.

Hæc inquam, è præcedentibus haud magnâ operâ colligantur, id verò ſufficiat admonitum; etenim hic animus eſt paulo ſubſiſtere.

APPEN-

APPENDICULA.

I. CUm pridem ante plures annos illustris Viri, *Christiani Hugenii*, *Cyclometrica* lustrarem, ac in eo versatus adverterem ad id negotii duas præsertim ab ipso methodos adhiberi; quarum una *Circuli segmentum* duobus parabolicis (uni inscripto, alteri adscripto) medium esse monstrans, illius inde magnitudini limites præscribit; altera *Parabolici segmenti*, & *Parallelogrammi* æquè altorum centris gravitatum medium interjacere centrum gravitatis circularis segmenti ostendens, alteros exindè limites, adsignat; incidit mihi cogitatio posse loco parabolæ in prima methodo, nec non vice Parallelogrammi in secunda, paraboliformium aliquam circulari segmento circumscriptibilem usurpari, sic ut res aliquanto propiùs attingatur; id mox verum esse re perpensâ comperi, quin & præterea notavi facilè suppares methodos *Hyperbolici segmenti dimensioni* accommodari. Quorum demonstratio (præ aliis fortasse, quæ excogitari possent) brevis & clara cùm è suprà positis consequatur aut pendeat, eam (alioquin opinor haud injucundam) hîc visum est apponere.

II. Adsumimus autem hæc pervulgata; quorúmque demonstrationes è præmonstratis haud difficilè variis modis colligantur; si *paraboliformis* BAE (cujus *Axis* AD, *Basis* vel ordinata BDE, *Tangens* BT; *Gravitatis centrum* K) exponens sit $\frac{n}{m}$; erit *Area* BAE $= \frac{m}{n+m}$ AD × BE; & TD $= \frac{m}{n}$ AD, & KD $= \frac{m}{n+2m}$ AD. Fig. 133.

III. Sint duæ quævis curvæ AEB, AFB (quarum communis axis AD, ordinata DB) ità se habentes, ut ductâ quâcunque rectâ EFG ad BD parallelâ, quæ lineas expositas punctis E, F, G secet, positóque quòd rectæ ES, FT tangant curvas, (illa curvam AEB, hæc ipsam Fig. 134.

ipſam AFB) ſit perpetuo TG major quàm SG; dico nullam curvæ AFB partem intra ipſam ABB cadere.

Si fieri poteſt, cadat pars NFM; ità ſcilicet ut curva AFB curvam AEB interſecet punctis M, N; his autem interjecta concipiatur indeterminatè ordinata EFG; ſint verò lineæ LXK, RYQ tales, ut ductis rectis EO, FP ad ipſas ES, FT perpendicularibus, protractâque rectâ EG, ut hæc dictas lineas LK, QR ſecet punctis X, Y, ſit GX = GO, & GY = GP. Jam ex oſtenſis patet eſſe *ſpatium* IHKL = $\frac{HMq - INq}{2}$ = ſpat. IHQR, adeóq; ſpat. IHKL, IHQR æquari. Verùm ob GE. GO (GX) :: SG. GE. ⊐ SG. GF ⊐ TG. GF :: GF. GP (GY) ⊐ GE. GY, eſt GX ⊏ GY; adeóque (cùm hoc ubique ſimiliter contingat) ſpatium IHKL majus ſpatio IHQR, quod repugnat oſtenſo. itaque liquet Propoſitum.

Hinc tota AFB extra totam AEB jacet, nec illa hanc uſquam interſecat.

IV. Sit curva quæpiam BAE, cujus axis AD, & ad hunc ordinata baſis ADE, ſegmenti verò BAE centrum gravitatis ſit punctum H, qer quod ducta ſit recta RS ad BE parallela Porrò per puncta R, S tranſeat altera curva (vel linea quævis) MRASN, habens itidem axin AD, ac ità priorem curvam BAE ſecans, ut ejuſce pars ſuperior RKAPS intra curvam BAE cadat, inferiores verò reliquæ partes RM, SN extra eandem; erit ſegmenti MRASN centrum gravitatis infra punctum H, verſus baſin MN. Fig. 135.

Nam è ſegmento RIAOS ablatum RIAK + AOSP reſiduum BRKAPSE deprimet verſus baſin BE, puta ut jam ſit hujus reſidui *Centrum gravitatis* ad X; tunc adjunctum BRM + ESN adhuc totum MRKAPSN magis deprimet; adeóque centrum ejus infra X conſiſtet, velut ad Y. itaque conſtat Propoſitum.

V. *Circulum* AFB, cujus *Centrum* C, tangant duæ rectæ BT, ES *Diametro* CA occurrentes punctis T, S; & ad CA perpendiculares ſint rectæ BD, EP; ſit autem AD major quàm AP; erit TD. AD ⊏ SP. AP. Fig. 136.

Nam eſt CT. CA :: CA. CD. Ideoque CT − CA. CA − CD :: CT. CA; hoc eſt TA. AD :: CT. CA. Simili ratione conſtabit eſſe SA. AP :: CS. CA. Eſt autem CT. CA ⊏ CS. CA. quare TA. AD ⊏ SA. AP. vel componendo TD. AD ⊏ SP. AP.

VI. *Hyper-*

VI. *Hyperbolam* AEB, cujus *Centrum* C, tangant duæ rectæ
Fig. 137. BT, ES, & reliqua ponantur ut in proximè præcedente; erit TD: AD ⸗ SP. AP.

Nam est CA. CD :: CT. CA. unde CA — CT. CD — CA :: CT. CA; hoc est TA. AD :: CT. CA. suppare discursu, est SA. AP :: CS. CA. Verùm est CT. CA ⸗ CS. CA. quare TA. AD ⸗ SA. AP, seu componendo TD. AD ⸗ SP. AP.

VII. *Circuli* AEB (cujus *Centrum* C) & *paraboliformis* AFB communes sint axis AD, & basis BD; sit autem *paraboliformis* exponens $\frac{n}{m}$; & $AD = \frac{m-2n}{m-n} CA$ (vel $m-n . m-2n :: CA . AD$) *circulum* verò tangat recta BT; hæc quoque *paraboliformem* AFB continget.

Fig. 138. Nam quia BT *circulum* tangit, est CT. CA :: CA. CD; unde TA. AD :: CA CD. componendoque TD. AD :: CA + CD. CD Item, quoniam est (ex hypothesi) CA. AD :: $m-n . m-2n$; erit per rationis conversionem CA. CD :: $m-n . n$. & componendo CA + CD. CD :: $m . n$. hoc est TD. AD :: $m . n$. unde (a) palam fit, quòd BT *paraboliformem* AFB tangit.

(a) 2 *hujus ap.*

VIII. Subnotetur, quòd inversè, datâ ratione ipsius AD ad CA' designabitur hinc *paraboliformis*; quæ *Circulum* AEB ad B continget. Nempe, si $AD = \frac{s}{t}$, erit $\frac{t-s}{2t-s}$ dictæ *paraboliformis* exponens. Nam posito fore $\frac{t-s}{2t-s} = \frac{n}{m}$; erit ideò (juxta crucem multiplicando) $mt - ms = 2tn - sn$; & transponendo $mt - 2nt = ms - ns$. ac ideò (æqualitatem ad analogismum redigendo) $m-n . m-2n :: t . s$ :: CA. AD. itaque constat ex antecedente Propositum.

IX. Manente quoad cætera septimæ hypothesi, *paraboliformis* AFB extrà *circulum* AEB tota cadet.

Fig. 139. Nam uteunque ducatur recta GEF ad DB parallela; quæ secet circulum ad E, paraboliformem in F; ductæque concipiantur rectæ ES *circulum*, & recta FR *paraboliformem* contingentes; Estque

RG.

RG.AG::(a) $m.n$::TD.AD(b)⊏SG.AG. quare RG ⊏SG. unde (c) patet tota AFB extra circulum AEB jacere. (a) 2. hujus. (b) 5. hujus ap. (c) 3. hujus ap.

X. Reliquis itidem ſtantibus, ſi ad baſin GE (utcunque parallelam ipſi DB) & axem AD conſtituta intelligatur *paraboliformis* ejuſdem cum ipſa AFB generis (nempe cujus etiam exponens $\frac{n}{m}$) illa ad partes A ſupra GE, extra *circulum* tota jacebit. Fig. 139.

Nam in arcu AE accepto quocunque puncto M, ductâque MP ad EG parallelâ, & MV circulum tangente, eſt VP. AP⊐SG. AG⊐RG.AG::$m.n$; (a) itaque rurſus liquet Propoſitum. (a) 3. hujus ap.

XI. Conſectatur etiam dictam (ipſi AFB coordinatam & ad baſin GE conſtitutam) *paraboliformem* infra GE ad DB protractam, eatenus intra *Circulum* totam cadere, Fig. 139.

Quòd intra *Circulum* ſtatim infra EG cadet ex eo patet, quòd ipſam tangens RE circulum ſecat (quia nempe SE circulum tangit). quòd alibi *Circulo* non occurret hinc patet; quòniam poſito quod occurrat uſpiam ad N, (a) tota ſupra N extra circulum caderet, contra quam modò dictum ac oſtenſum eſt. (a) 3. hujus ap.

XII. Porrò, *Hyperbola* AEB (cujus centrum C) & *paraboliformis* AFB, cujus exponens $\frac{n}{m}$, communes ſint axis AD, baſis DB; Fig. 140.

ſit autem $AD=\frac{2n-m}{m-n}CA$; & BT *hyperbolam* tangat; hæc quoque *paraboliformem* AFB continget.

Nam eſt CD.CA::CA.CT. ac indè AD.TA::CD.CA, inverſèq; componendo TD.AD::CA+CD.CD. Verùm ex hypotheſi, eſt $m-n.2n-m$::CA.CD, adeoque inverſè componendo CA.CD::$m-n.n$; & rurſus componendo CA+CD. CD::$m.n$. hoc eſt TD.AD::$m.n$. unde BT *hyperboliformem* contingit.

XIII. Hinc rurſu datâ ratione ipſius AD ad CA, *paraboliformis* ad punctum B *hyperbolam* contingens deſignabitur. nempe ſit $AD=\frac{s}{t}CA$; erit $\frac{n}{m}=\frac{t+s}{2t+s}$ Nam hoc ſuppoſito erit (componendo mul-

multiplicando) $2tn+sn=mt+ms$. vel transponendo $2nt-mt=ms-ns$. unde $m-n.2n-m::t.s::CA.AD.$ ergò patet ex antecedente.

XIV. Stante duodecimæ hypothesi, *paraboliformis* AFB intra hyperbolam AEB tota cadet.

Fig. 141. Nam utcunque ducatur EFG ad BD parallela; & recta ER *hyperbolam*, recta FS *paraboliformem* tangant. Estque SG.AG::(a) $m.n$::TD.AD(b) $\sqsupset$RG.AG. unde RG$\sqsubset$SG.(c) unde curva AEB extra curvam AFB tota cadet.

(a) 2. *hujus ap.* (b) 6. *hujus ap.* (c) 3. *hujus ap.*

XV. Etiam, si reliquis perstantibus, ad basin GE, axin AG constituram imagineris ejusdem ordinis *paraboliformem*; hæc ad partes ipsâ GE superiores intra *hyperbolam* tota cadet.

Fig. 141.

Nam si in *curva hyperbolica* AE sumatur ubicunque punctum M, & ordinetur MP, ducatúrque hyperbolam tangens MV; erit VP.AP$\sqsubset m.n.$ adeoque rursus è tertia liquet Propositum.

XVI. Quinetiam si hæc altera coordinata *paraboliformis*, ad basin EG constituta, ad DB protracta concipiatur, ejus ipsis EG, BD intercepta pars extra *hyperbolam* tota cadet.

Fig. 141.

Nam quòd extra *hyperbolam* infra EG cadit, exinde patet, quòd ipsa cum ipsius tangente recta ES angulum efficit minorem eo, quem eadem recta ES efficit cum recta RE hyperbolam tangente. quòd autem eadem alibi, velut ad N, *hyperbola* non occurrit, patet; quoniam hoc posito, (a) ipsa intra *hyperbolam* AN tota consisteret, contra quàm mox ostensum est.

(a) 3. *hujus ap.*

XVII. Habeant *Circulus* AEB, & *Parabola* AFB communem axem AD, & basin DB; *parabola* ad partes supra BD intra *Circulum*; at infra BD extra *circulum* cadet.

Sit enim *Circuli Diameter* AZ, & ei æqualis AH ad BD parallela, & connectatur ZH; & huic BD producta ad I; ergo DI est *Parameter parabolæ* AFB. quòd si supra BD utcunque ducatur recta EFGK ad BD parallela circulum secans in E, parabolam in F, rectas AZ, HZ, in G, & K, patet esse GEq$=$AG$\times$GK$\sqsubset$AG$\times$DI$=$GFq. unde GE$\sqsubset$GF. Item, si infra BD utcunque ducatur recta MNOL ad BD parallela *parabolam* secans in M, *circulum* in N, rectas AZ, HZ in O, & L, itidem patet esse MOq$=$AO$\times$DI$\sqsubset$AO$\times$OL$=$NOq. & ideò MO$\sqsubset$NO.

Fig. 142.

$\sqsubset$ NO. quare liquent ea, quæ Proposita sunt.

Si *Circulo* substituatur *Ellipsis*, eadem conclusio valet idem discursus probat; posità AH *Ellipsis parametro*.

XVIII Habeant *hyperbola* AEB (cujus axis AZ, parameter AH) & *parabola* AFB axin eundem AD, & basin DB, *parabola* supra DB tota extra *hyperbolam* cadet, extra verò, si infra DB protrahatur, Fig. 143.

Nam connexæ ZH occurrat BD in I; ergò DI est *parabolæ parameter*. Quòd si supra BD utcunque ducatur recta FEGK ad BD parallela, secans hyperbolam in E, parabolam in F, rectas AD, ZH punctis G, K, erit $FGq = AG \times DI \sqsubset AG \times GK = EGq$. quare $FG \sqsubset EG$. Quòd si infra BD, utcunque ducatur recta MNOL secans hyperbolam in N, parabolam in M, rectas AD, ZH in O, & L, erit $NOq = AO \times OL \sqsubset AO \times DI = MOq$ & indè $NO \sqsubset MO$. unde constant ea quæ proposita sunt.

XIX. E dictis eliciuntur hæ *ad Circuli dimensionem pertinentes regulæ*. Sit BAE circuli portio, cujus axis AD, basis BE, sitque C centrum circuli, & EH sinus rectus arcus BAE; item, sit $AD = \frac{s}{t}CA$; erit 1. $\frac{2t-s}{3t-2s}AD \times BE \sqsubset$ port. BAE. Fig. 144.

2. $EH + \frac{4t-2s}{3t-2s}BH \sqsubset$ arc. BAE.

3. $\frac{2}{3}AD \times BE \sqsupset$ port. BAE.

4. $EH + \frac{4}{3}BH \sqsupset$ arc. BAE.

XX. Itidem hæ deducuntur ad *hyperbolæ dimensionem spectantes regulæ*. Sit *hyperbola* (cujus centrum C) segmentum ADB, habens axin $AD = \frac{s}{t}CA$; & basin DB, Fig. 145.

erit 1. $\frac{2t+s}{3t+2s}AD \times DB \sqsupset$ segm. ADB. &

2. $\frac{2}{3}AD \times DB \sqsubset$ segm. ADB.

XXI. Porrò, ſit *circuli* (cujus centrum C) ſegmentum B A E, cujus axis A D, & *gravitatis centrum* K; ponatur autem $AD = \frac{s}{t} CA$, & $HD = \frac{2t-s}{5t-3s} AD$; erit H D major ipsâ K D.

Fig. 146. Nam per H ducatur recta O P ad B E parallela; eſtque punctum H (a) centrum *gravitatis paraboliformis*, (puta A F B) ad baſin B E conſtitutæ, cujus exponens $\frac{t-s}{2t-s}$ & (b) quæ proinde circulum A E B tangit; (nam ſi $\frac{t-s}{2t-s} = \frac{n}{m}$; erit $\frac{2t-s}{5t-3s} = \frac{m}{m+2n}$) & proinde H (a) erit centrum gravitatis *paraboliformis* iſti coordinatæ per O, P tranſeuntis, & ad baſin B E pertingentis. Hæc autem ſupra O P (c) extra *circulum* cadit, & infra O P (d) intra ipſum; (e) adeóque punctum H ſupra K ſitum eſt.

(a) 2. *hujus ap.*
(b) 8. *hujus ap.*
(c) 10. *hujus ap.*
(d) 11. *hujus ap.*
(e) 4. *hujus ap.*

Fig. 146. XXII. Sin punctum L ſit *centrum gravitatis parabolæ*, erit L infra K ſitum; adeóque $KD < \frac{2}{5} AD$. Patet ex 4, & 17 hujus appendiculæ.

Fig. 147. XXIII. Sit *Hyperbola* (cujus centrum C) *ſegmentum* B A E, cujus axis A D, baſis B E; gravitatis centrum K; ponatur autem $AD = \frac{s}{t} CA$, & $HD = \frac{2t+s}{5t+3s} AD$; erit H D minor ipsâ K D.

(a) 2. *hujus ap.* Nam per H ducatur recta O P ad B E parallela (a). Eſtque punctum H centrum gr. *paraboliformis*, puta A F B, ad baſin D B conſtitutæ, cujus exponens $\frac{t+s}{2t+s}$; (b) quæ & *Hyperbolam* ad B contingit (nam ſi $\frac{t+s}{2t+s} = \frac{n}{m}$; erit $\frac{2t+s}{5t+3s} = \frac{m}{n+2m}$) (a) quare H erit centrum gravitatis paraboliformis iſti coordinatæ per O, P ductæ, & ad B E pertingentis. hæc autem ſupra O P (c) intra hyperbolam cadit; & infra O P (d) extra illam; (e) inde punctum K ſupra H exiſtit.

(b) 13. *hujus ap.*
(c) 15. *hujus ap.*
(d) 16. *hujus ap.*
(e) 4. *hujus ap.*

XXIV. Parabolæ centrum gr. (puta L) ſupra K exiſtit, adeóque $KD < \frac{2}{5} AD$. Patet ex 4, & 18 hujus appendiculæ.

XXV. Nè

XXV. Nè ſpeculatio præſens, *ob hujuſmodi complures methodos Cyclometricas indies promulgatas*, aſpernanda videatur, adjungemus conſectarium unum vel alterum, quibus fortè ſolis hæc paucula meruerant impendi; à quibus nempe *Maxima, Minimaque* ſui generis innumera determinantur. Fig. 148.

Sit *Semicirculus* ABZ, cujus centrum C; ſitque *ſegmentum* ADB; & huic adſcripta *paraboliformis* AFB, cujus exponens $\frac{n}{m}$; ſit item $AD = \frac{m-2n}{m-n} CA$; *paraboliformis* autem *parameter* (hoc eſt recta, cujus aliqua poteſtas in poteſtatem ſegmenti axis, ſeu AD, ducta conficit *poteſtatem* ordinatæ, ceu DB) nominetur p; erit p in ſuo genere *maximum*.

Nam utcunque ducatur GE ad DB parallela, & ad GE poſita concipiatur *paraboliformis*, ipſi AFB coordinata, cujus *parameter* dicatur q. quum ergo *paraboliformis* AFB *circulum* extrorſum contingat, erit $GF \sqsubset GE$; adeóque $GF^{\frac{n}{m-n}} \sqsubset GE^{\frac{n}{m-n}}$; hoc eſt $p^{\frac{n}{m-n}} \times AG^{\frac{n}{m-n}} \sqsubset q^{\frac{n}{m-n}} \times AG^{\frac{n}{m-n}}$; quare $p \sqsubset q$.

Notandum eſt eſſe $p^{\frac{2m-2n}{m-n}} = ZD^m \times AD^{\frac{m-2n}{m-n}}$. & $q^{\frac{2m-2n}{m-n}} = ZG^m \times AG^{\frac{m-2n}{m-n}}$. unde $ZD^m \times AD^{\frac{m-2n}{m-n}} \sqsubset ZG^m \times AG^{\frac{m-2n}{m-n}}$, quare $ZD^m \times AD^{\frac{m-2n}{m-n}}$ eſt maximum.

Exemp. 1. Sit $n = 1$, & $m = 3$. erit ideò $p^2 = ZD^1 \times AD = ZDq \times BDq$; vel $p^2 = ZD \times BD$. Item $AD = \frac{1}{2} CA$.

2. Sit $n = 3$, & $m = 10$. erit $p^{\frac{14}{7}} = ZD^{10} \times AD^4$. vel $p^2 = ZD^5 \times AD^2 = ZD^3 \times BD^4$. & $AD = \frac{2}{7} CA$.

XXVI. Sit item *hyperbola* (æquilatera) cujus centrum C, axis ZA; & huic inſcripta *paraboliformis* AFB cujus exponens $\frac{n}{m}$ *parameter* p; ſitque $AD = \frac{2n-m}{m-n} CA$; erit p ſui generis maximum. Fig. 149.

Nam utcunque ducatur EG ad BD parallela; & ad EG conſtituta intelligatur *paraboliformis*, ipſi AFB coordinata, cujus *parameter* q. quum ergo *paraboliformis* AFB *hyperbolam* introrſum contingat, erit $GF^{\frac{n}{m-n}} \sqsupset GE^{\frac{n}{m-n}}$; hoc eſt $p^{\frac{n}{m-n}} \times AG^{\frac{n}{m-n}} \sqsupset q^{\frac{n}{m-n}} \times AG^{\frac{n}{m-n}}$; quare $p \sqsupset q$.

Notandum

Notandum est esse $p^{\frac{2n-2m}{n}} = \frac{ZD^{2n}}{AD^{2n-2m}}$. & $q^{\frac{2n-2m}{n}} = \frac{ZG^{2n}}{AG^{2n-2m}}$. unde erit $\frac{ZD^{2n}}{AD^{2n-2m}} \sqsupset \frac{ZG^{2n}}{AG^{2n-2m}}$. quare $\frac{ZD^{2n}}{AD^{2n-2m}}$ est minimum.

Fig. 149.

Exemp. 1. Sit $n=2$; & $m=3$; erit $p^2 = \frac{ZD^4}{AD^4} = \frac{BD^4}{AD^4}$. & $p = \frac{BD^2}{ADq} = \frac{ZDq}{BD}$. Item AD = CA.

2. Sit $n=3$; & $m=4$; erit $p^3 = \frac{ZD^6}{AD^6}$ vel $p = \frac{ZD^2}{AD} = \frac{BD^2}{AD^2} = \frac{ZD^2}{BD^2}$. Item AD = 2 CA.

3. Sit $n=5$, & $m=8$; erit $p^5 = \frac{ZD^8}{AD^2}$ vel $p^5 = \frac{ZD^4}{AD} = \frac{BD^8}{AD^4} = \frac{ZD^4}{BD^4}$. Item AD = $\frac{4}{3}$ CA.

Quoniam in his *Cyclometriam* attigi, quid si obiter eò spectantia *Theoremata*, quæ ad manum, paucula subjunxero? præsternatur autem autem hoc καθολικὸν:

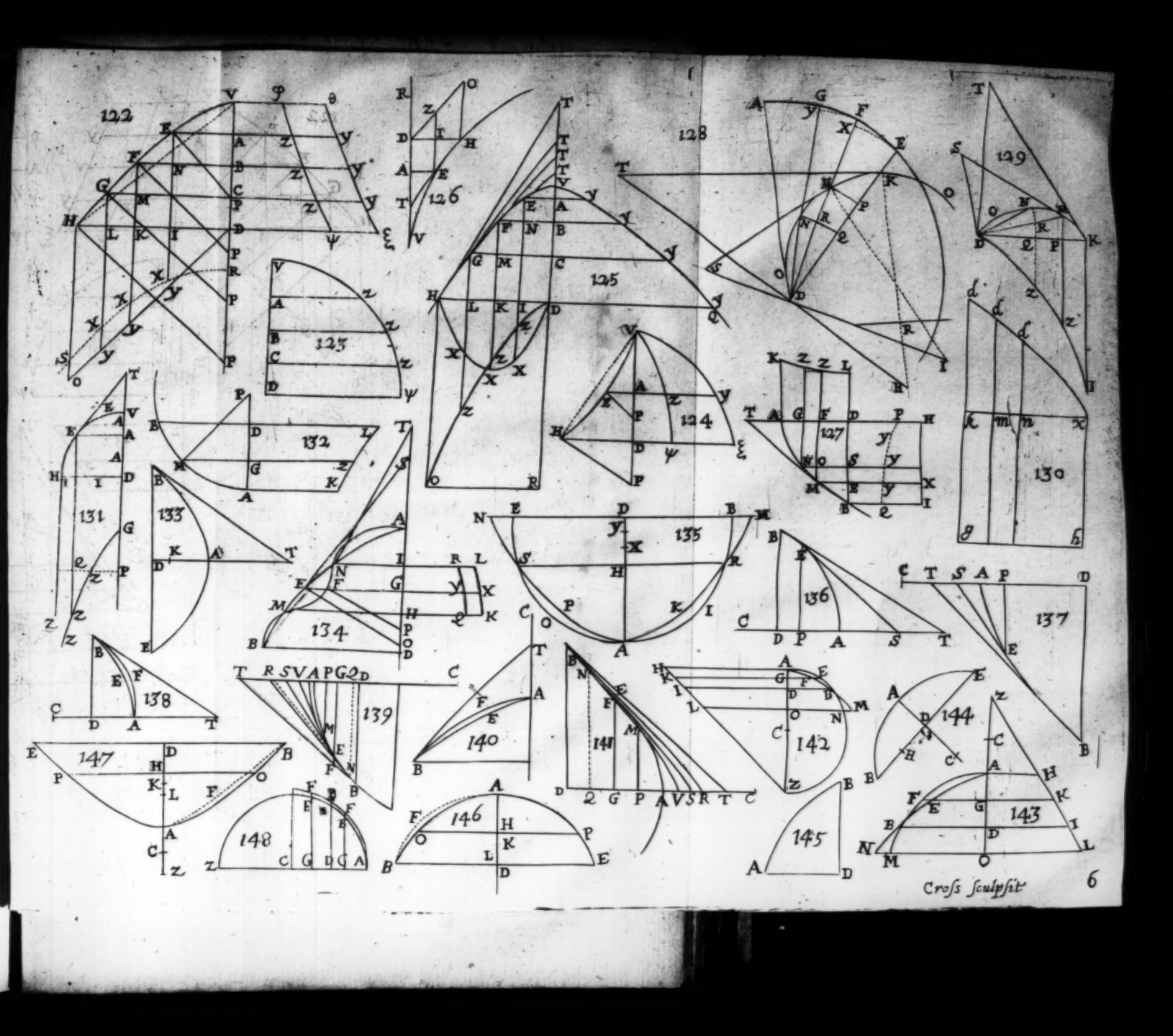
Fig. 150.

Sit curva quæpiam AGB, cujus axis AD, & ad hunc ordinatæ rectæ BD, GE; Habebit curva AB ad curvam AG majorem rationem quàm recta BD ad rectam GE.

Nam ducatur recta GH ad AD parallela: secentúrque recta BH punctis Y, & recta GE punctis Z in particulas indefinitè multas; pérque puncta Y, Z ducantur rectæ YM, YN, ZO, ZP ad AD parallelæ: curvam intersecantes punctis M, N, O, P; per quæ ducantur rectæ MR, NS, OT, PV ad BD parallelæ. Estque angulus BMY (ut è superiùs ostensis liquet) minor angulo NGS, unde MB.BY ⊏ GN.NS. Similíque de causa est NM.MR ⊏ GN.NS.* quare conjunctè est BM + MN + NG.BY + MR + NS ⊏ GN.NS; hoc est arc. GB.BH ⊏ GN.NS. rursus (è discursu consimili) ratio GN ad NS major est singulis rationibus OG ad GZ, OP ad PT, & AP ad PV; idcircoq; junctè est GN.NS ⊏ arc. AG.GE. quapropter erit GB.BH ⊏ AG:GE. permutandoque GB.AG ⊏ BH.GE. quare componendo est AB.AG ⊏ BD.GE.

* Vid. *Append.* Lect. XII.

XXVIII.


122
123
124
125
126
127
128
129
130
131
132
133
134
135
136
137
138
139
140
141
142
143
144
145
146
147
148
Cross sculpsit
6

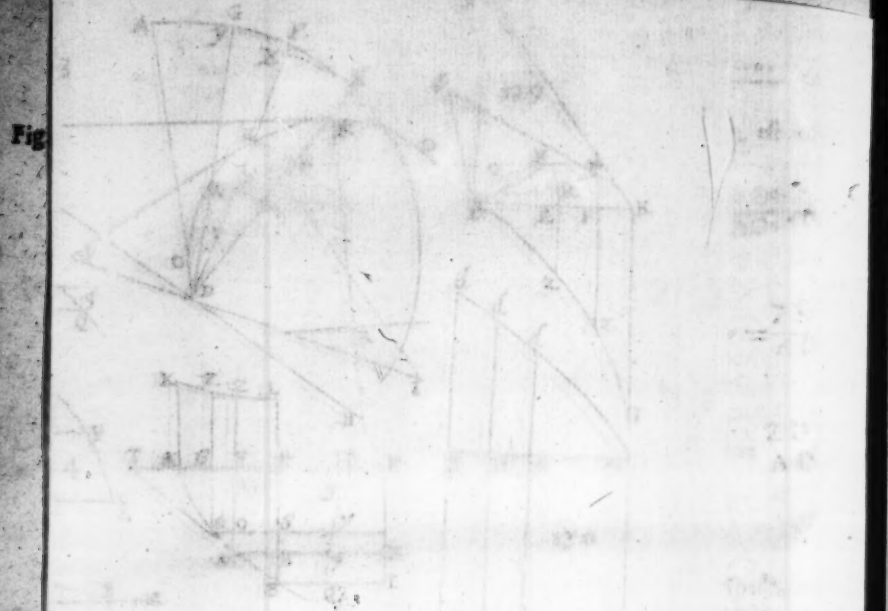


Fig.

Fig.

* Vi
L

XXVIII. Sit *Circulus* AMB, cujus *Radius* CA, & ad hunc perpendicularis recta DBE; sit item curva ANE talis, ut ductâ utcunque rectâ PMN ad DE parallelâ (quæ circulum secet in M, dictam curvam in N) sit recta PN æqualis *Arcui* AM; sit demum *axis* AD, *basi* DE descripta *Parabola* AOE, hæc extra curvam ANE tota cadet. Fig. 151

Nam secet recta PN parabolam in O; & connectantur subtensæ AB, AM; estque DE. PN :: arc. AB. arc. AM ⊏ AB. AM :: DE. PO. quare PN ⊐ PO; unde liquet Propositum.

XXIX. Exhinc (& è vulgò notis *spatiorum* ADB, ADE *dimensionibus*) facilè colligitur hæc regula: $\frac{3CA \times DB}{2CA + CD} \sqcap$ arc. AB. Fig. 152.

Porrò si ponatur arc. AB = 30 grad. sitque 2CA = 113; juxta regulam istam computando, proveniet *tota circumferentia* major quam 355, minus fractione unitatis.

XXX. Hinc etiam *dato arcu* AB, nominatisque AB = p; CA = r; & DB = e, ad inveniendum *sinum rectum* DB adhibebitur hæc æquatio; $\frac{3rrpp}{9rr + pp} = \frac{12rrp}{9rr + pp} e - ee$. vel ponendo $k = \frac{3rrp}{9rr + pp}$, erit $kp = 4ke - ee$. vel $2k - \sqrt{4kk - kp} = e$.

XXXI. Sit AMB *Circulus*, cujus Radius CA, & huic perpendicularis recta DBE; sit item curva ANE pars *Cycloidis* ad *Circulum* AMB pertinentis; demum ad axem AD, basin DE statuatur *Parabola* AOE; hæc intra *Cycloidem* tota cadet. Fig. 153.

Etenim utcunque ducatur recta PMON ad DE parallela, lineas expositas secans, ut cernis; connectantúrque *subtensæ* AB, AM; estque DE. PO :: AB. AM :: curv. AE. AN ⊏ DE. PN; adeoque PO ⊐ PN. unde constat Propositum.

XXXII. Exhinc, & è *notis segmentorum circularis atque Cycloidalis dimensionibus*, hæc elicitur *Regula* $\frac{2CA \times DB + CD \times DB}{CA + 2CD}$ ⊏ arc. AB.

Porrò si fuerit arc. AB = 30 grad. & ponatur 2CA = 113; è regula hac consectatur fore *totam circumferentiam* minorem quam 355, plus fractione.

Vides igitur ut è propositis duabus regulis statim emergit *Diametri* ad *Circumferentiam Proportio Metiana*.

XXXIII. Quoniam exorbitanti se obviam dedit *Cyclois* hoc adnotabo *theorema*, nescio an uspiam ab illis, qui de *Cycloide* tam fusè scripserunt, animadversum: Completo *Rectangulo* ADEG, *spatium* AEG

AEG æquatur *Circulari segmento* ADB demonstrationem, ne longiùs evager, obmittam.

Fig. 154. XXXIV. Sint duo *circuli* AIMG, AKNH sese contingentes ad A; communique diametro A H G, utcunque perpendicularis ducatur recta D N M: habebit *segmentum* A I M D ad *segmentum* AKND minorem rationem, quam recta DM ad rectam D N.

Nam sit A R ad A G perpendicularis, ac ipsi A H æqualis; & connectatur H R, cui occurrat recta M D in X; ducatúrque recta G X S; tum ad axem A G *parametrum* A S per N descripta concipiatur *Ellipsis* A L N G; hæc (uti satis manifestum) intra arcum A K N tota cadet. Est autem segm. A I M D. segm. A L N D:: D M. D N. ergo segm. A I M D. segm. A K N D $\dashv$ DM. DN.

Fig. 154. XXXV. Sit Ellipsis YFZT, cujus axes conjugati YZ, FT; sit item recta DC axi majori Y Z parallela, & per D, F, C transeat circulus DFCV centrum habens K, in ellipsis axe minore F T situm; dico circuli partem DOFPC intra ellipsis partem DMFNC jacere.

Nam sit F l ad FV perpendicularis, & in hac sumatur FS = FV; & connectatur V S, cui DC producta occurrat in X; & connexa T X ipsi Fl occurrat in R. & cum sit G D q = F G × G V = F G × GX; liquet ipsam FR esse ellipsis, axi F T congruam, parametrum; unde constat Propositum.

Fig. 155. XXXVI. Sit circuli, cujus centrum L, segmentum DEC, & sumpto in ejus axe GE puncto quopiam F, sit curva DMFC talis, ut ductâ utcunque rectâ RMS ad G E parallelâ, sit R S. R M:: G E. G F; erit DMFC ellipsis, hoc modo determinata: Fiat E G. F G:: G L. G H; & per H erigatur YHZ ad DC parallela, sitque HY par ipsi LE; erunt HY, HF ellipsis semiaxes.

Demonstratum habetur à *Greg. à S. Vincentio*, L. IV. Prop. 154. *Corol.* Hinc segm. DEC. D MFC:: EG. F G.

XXXVII. Sint duæ circulorum portiones DEC, DOFC, quarum communis subtensa DC, & axis GFE; portio major DEC ad portionem DOFC majorem rationem habet eâ, quam habet axis G E ad axem G F.

Nam sint L circuli DSEC, & K circuli DOFC centra; & fiat EG. FG:: GL. GH; & fiat YHZ ad HF perpendicularis, & sit HY æqualis ipsi LE; tum semiaxibus HY, HF descripta concipiatur ellipsis YDMFCZ; è mox prædictis liquet ellipsin DMFC circulo DOFC circumduci. Est autem circulare segmentum DEC ad segmentum ellipticum DMFC, ut GE ad GF; quare segm DEC ad segm circulare DOFC. rationem habet majorem, quam GE ad GF: Quod. E. D.

LECT.

Lect. XII.

IN ſuſcepto negotio progredimur; quod ut (quatenus licet) decurtemus, verbíſque parcamus; obſervetur, in ſequentibus ubique *lineam* A B *curvam* eſſe (quales tractamus) quampiam; cujus *Axis* AD; huic applicatas omnes rectas B D, C A, M F, N G perpendiculares; & M E, N S, C B parallelas eſſe; *punctum* M liberè ſumi; *arcum* M N indefinitè parvum eſſe; rectam $\alpha\zeta$ curvæ V B, $\alpha\mu$ curvæ A M, $\mu\nu$ *arcui* M N æquales eſſe; ad rectam $\alpha\zeta$ applicatas ei perpendiculares eſſe. His præſtratis, *Præparatio Communis.*

I. Sit M P curvæ A B perpendicularis; & lineæ K Z L, $\alpha\varphi\delta$ tales, ut F Z ipſi M P, & $\mu\varphi$ ipſi M F æquentur; erit *ſpatium* $\alpha\zeta\delta$ ipſi A D L K æquale. Fig. 156, 157.

Nam *Triangula* M R N, P F M ſimilia ſunt, adeoque M N . N R :: P M . M F. unde M N × M F = N R × P M, hoc eſt (ſubſtitutis æqualibus) $\mu\nu \times \mu\varphi$ = F G × F Z; ſeu rectang. $\mu\theta$ = rectang. F H; ſpatium verò $\alpha\zeta\delta$ minimè differt ab indefinitè multis rectangulis, qualia $\mu\delta$; & ſpatium A D L K totidem rectangulis, qualia F H, æquivalet. unde liquet Propoſitum.

II. Hinc, ſi curva A M B circa axem A D rotetur, habebit ſe *producta ſuperficies* ad *ſpatium* A D L K, ut *Circumferentia circuli ad radium*; unde noto ſpatio A D L K cognoſcetur dicta *ſuperficies*. Conſequentiæ rationem jam anteà pridem aſſignavimus. Fig. 156.

III. Exhinc *Sphæræ*, *Sphæroidis* utriuſque, *Conoidúmque ſuperficies dimenſionem* accipiunt; nam ſi A D ſit conicæ ſectionis, a qua iſtæ figuræ oriuntur, axis; linea K Z L ſemper aliqua conicarum exiſtet, haud difficili negotio determinabilis. Hoc ſuggero tantùm, quoniam nunc evulgatum habetur.

IV. Iisdem ſtantibus, ſit curva AYI talis, ut ordinata FY ſit inter congruas FM, FZ proportione media, erit *ſolidum* ex ſpatio $a\delta c$ circa axem ac rotato factum æquale *ſolido*, quod à *ſpatio* ADI circa axem AD converſo procreatur. Fig. 156, 157.

Nam eſt MN. NR :: PM. MF :: PM × MF. MFq :: FZ × FM. MFq. unde MN × MFq = NR × FZ × FM; hoc eſt $\mu\nu \times \mu\varphi q = NR \times FYq$. Unde liquet Propoſitum.

V. Simili ratione colligetur, ſi FY ponatur inter FM, FZ *bimedia*, fore *ſummam cuborum* ex applicatis (quales $\mu\varphi$) à curva $a\varphi\delta$ ad rectam ac, æqualem *ſummæ cuborum* ex explicatis à curva AYI ad rectam AD. parique modo ſe res habebit quoad cæteras *poteſtates*. Fig. 156, 157.

VI. Porrò, ſtantibus reliquis, ſit curva VXO talis, ut EX ipſi MP æquetur, & curva $\varpi\xi\downarrow$ talis, ut $\mu\xi$ æquetur ipſi PF; erit ſpatium $a\varpi\downarrow c$ æquale ſpatio DVOB. Fig. 156.

Nam eſt MN. MR :: MP. PF; adeoque MN × PF = MR × MP, hoc eſt $\mu\nu \times \mu\xi = ES \times EX$. vel rectang. ET = rectang. $\mu\sigma$. Unde liquet Propoſitum.

VII. Subnotetur hoc : Si curva AB ſit *Parabola*, cujus *Axis* AD, *parameter* R; erit curva VXO *hyperbola*, cujus *centrum* D, *Axis* DV, cujuſque *parameter* axi R æquatur (ſcilicet ob $EXq = (PMq = PFq + FMq = \frac{Rq}{4} + FMq = \frac{Rq}{4} + DEq =) DVq + DEq$). item *ſpatium* $ac\downarrow\varpi$ erit *Rectangulum*; quoniam ſingulæ applicatæ $\mu\xi$ ipſi $\frac{R}{2}$ æquantur. Conſtat itaque dato *ſpatio hyperbolico* DVOB curvam AMB dari; & viciſſim. Hoc obiter. Fig. 156.

VIII. Adnotari poſſet etiam omnia ſimul quadrata ex applicatis ad rectam ac à curva $\varpi\xi\downarrow$ æquari rectangulis omnibus ex PF, EX ad rectam DB applicatis (ſeu computatis); cubos ex $\mu\xi$ æquari ipſis PFq × EX; ac ità porrò. Fig. 156.

IX. Adjungatur etiam (productâ PMQ) ſi ponatur FZ æqualis ipſi PQ, & $\mu\varphi$ ipſi AQ; *ſpatium* $ac\delta$ *ſpatio* ADLK æquari. Fig. 157.

Nam

Nam ob MN. NR :: PM. MF :: PQ. QA, erit MN × QA = NR × QA, hoc eſt rectang. μθ = rectang. FH.

X. Porrò, curvam AB tangat recta MT, ſintque curvæ DXO, αφδ tales, ut EX æquetur ipſi MT, & μφ ipſi MF, erit ſpatium αδβ æquale *ſpatio* DXOB. Fig. 158. 159.

Nam MN. MR :: MT. MF. quare MN × MF = MR × MT, hoc eſt μν × μφ = ES × EX, unde patet.

XI. Hinc rurſus, *ſuperficies ſolidi ex ſpatii* AB D circa axem AD converſione progeniti ad *ſpatium* DXOB ſe habet, ut *Circuli Circumf.* ad *radium*; hoc igitur noto ſimul illa innoteſcet. unde rurſus *Sphæroidum, Conoidumque ſuperficies* dimetiri licebit. Fig. 158.

XII. Si linea DYI talis fuerit, ut ſit EY = √EX × MF, erit *ſolidum* ex *ſpatio* αδβ circa axem αC rotato factum æquale *ſolido, quod ex ſpatio* DBI circa axem DB rotato progignitur.

Etenim eſt MN. MR :: MT × MF. MFq :: EX × MF. MFq :: EYq. MFq. quare MN × MFq = MR × EYq. hoc eſt μν × μφq = ES × EYq. Fig. 158. 159.

XIII. Simili ratione *Cuborum* (*aliarumque poteſtatum*) ex ordinatis μφ *ſummas* cum *ſpatiis* ad rectam DB computatis licebit conferre.

XIV. Sint præterea lineæ AZK, αξψ tales, ut FZ ipſi MT, & μξ ipſi TF æquentur; *ſpatium* αCψ æquabitur *ſpatio* ADK.

Etenim MN. NR :: MT. TF; hoc eſt μν. FG :: FZ. μξ. quare μν × μξ = FG × FZ. Fig. 158. 159.

XV. Etiam *ſumma quadratorum* ex applicatis μξ æquatur *ſummæ Rectangulorum* ex TF, FZ; & *ſumma Cuborum* ex μξ æquantur ipſis TFq × FZ (ad rectam ſcilicet AD computationem exigendo) parique quoad cæteras poteſtates modò. Fig. 158, 159.

XVI. Rurſus ponatur recta QMP curvæ AMB perpendicularis; ſitque recta Cδ æqualis ipſi BD, & compleatur *Rectangulum* αCδζ; tum curva KZL talis ſit, ut FZ ipſi QP æquetur; erit *rectang.* αCδζ æquale *ſpatio* ADLK. Fig. 160, 161.

Nam eſt MN. NR :: (PM. MF ::) PQ. IF. quare MN × IF = NR × PQ; hoc eſt μν × μξ = FG × FZ. unde patet.

Hinc noto ſpatio AKLD cognoſcetur curvæ AMB quantitas.

Fig. 160, 161. XVII. Item, poſito rectam TMY contingere curvam AMB, factâque $C\gamma = BC$, completóque *Rectangulo* $\alpha C\gamma\downarrow$, ſit curva OXX talis, ut FX ipſi TY æquetur; erit *ſpatium* (infinitè protenſum) ADOXX æquale *Rectangulo* $= C\gamma\downarrow$.

Nam MN. NR :: YT. DA, hoc eſt $\mu\nu$. FG :: FX. $\mu\theta$. & $\mu\nu \times \mu\theta = FG \times FX$. quare liquet.

Hinc rurſus, explorato *ſpatio* ADOXX curva AMB innoteſcet,

Fig. 160, 161. XVIII. Quin adſumptâ quâpiam determinatâ R, & factâ rectâ $C\lambda = R$; ſi curva OXX talis ſit, ut MF. MP :: R. FX, erit *rectangulum* $\alpha C\lambda\zeta$ æquale *ſpatio* ADOXX. ac inde comperto hoc ſpatio, curva prorſus innoteſcet.

Nam MN. NR :: MP. MF :: FX. R. adeóque $MR \times R = NR \times FX$; ſeu $\mu\nu \times \mu\xi = FG \times FX$.

Complura talia poſſent adponi; ſed vereor ut hæc nimis quam ſufficere videantur.

XIX. Adnotetur ſaltem, hæc omnia æquè vera fore, nec abſimiliter oſtendi, poſito curvæ AMB convexa rectam AD ſpectare.

XX. Ex oſtenſis autem *methodus* facilis emergit *curvas* (γραμμικὰς) *deſignandi*, quæ *dimenſionem* admittunt qualem qualem; nimirum ità procedas.

Fig. 162. Quamlibet (tibi quadantenùs notam) *aream trapeziam rectangulam*, duabus parallelis rectis AK, DL; rectâ AD; & lineâ quâcunque KL *comprehenſam* accipe sîs. ad iſtam verò ſic referatur altera ADEC, ut ductâ quâcunque rectâ FH ad DL parallelâ (quæ ſecet lineas AD, CE, KL punctis F, G, H) adſumptâque rectâ determinatâ Z;

Fig. 163. ſit *quadratum* ex FH æquale *quadratis* ex FG, & Z. quinetiam ſit curva AIB talis, ut ad ipſam productâ rectâ GFI, ſit *rectangulum* ex Z, & FI æquale *ſpatio* AFGC; erit *rectangulum* ex Z, & *curva* AB æquale *ſpatio* ADLK.

Æquè procedit methodus, etiamſi recta AK ponatur infinita.

Fig. 162. *Exemp.* 1. Sit KL *recta linea*; erit curva CGE *Hyperbola*.

Fig. 163. 2. Sit linea KL *Arcus Circuli*, cujus *Centrum* D; & AK = Z

$= Z$; erit curva AGF *Circulus*; & curva AB $= \frac{AD}{2} + \frac{DL}{2AK}$ arc. KL.

3. Sit linea KL *Hyperbola æquilatera*, cujus *Centrum* A, & *Axis* AK $= Z$; erit CGE recta linea; & curva AB *Parabola*. Fig. 164.

4. Sit Linea KL *Parabola* (cujus axis AD) erit curva CGE quoque *Parabola*; & curva AB *Paraboliformium* quædam. Fig. 163.

5. Sit curva KL *Paraboliformis* quædam inversa, vel infinita (talis scilicet ut sit $FH = \sqrt{\frac{Z^2}{AF}}$) erit curva AB *Cycloïdi*, ad *circulum* pertinens, cujus *Diameter* ipsi Z æquatur. Fig. 165.

Elegantiora forsan *Exempla* ipse circumspectans excogitabis.

APPENDI-

APPENDICULA I.

Hic demùm etsi præter institutum sit particularia nunc attingere; qualibus sanè, hæc generalia consequentibus, admodum proclive foret turgidum Volumen compingere (*amico tamen morem gerens operâ* dignum censenti) subtexam ad *Circuli Tangentes Secantesq;* spectantia nonnulla, pleraque de suprà positis emergentia.

Præparatio Communis.

Fig. 166. Esto *cirtuli Quadrans* A C B, quam tangant rectæ A H, B G; & in productis H A, A C sumantur A K, C E singulæ pares *radio* C A; & *asymptotis* A C, C Z per K descripta sit *Hyperbola* K Z Z; *asymptotis* B C, B G per E *hyperbola* L E O. Sumatur etiam in arcu A B Fig. 167. *punctum arbitrarium* M, per quod ducantur recta C M S (tangenti A H occurrens in S) recta M T circulum tangens; recta M F Z ad B C parallela, recta M P L ad A C parallela. Sit denuò recta αC æqualis *arcui* A B, & $\alpha\mu$ arcui A M; & rectæ $\alpha\gamma$, $\xi\mu$ $\pi\downarrow$ rectæ αC perpendiculares; quarum $\alpha\gamma = AC$; $\mu\xi = AS$; $\mu\downarrow = CS$; $\mu\pi = MP$.

I. Recta C S æquatur rectæ F Z; adeoque *summa secantium ad arcum* A M pertinentium, & ad rectam A C applicatarum æquatur *spatio hyperbolico* A F Z K.

Est enim C F. C A :: (C M. C S ::) C A. C S. adeòque C F × C S = C Aq. item C F × F Z = C A × A K = C A q. ergo C S = F Z.

Fig. 167. II. *Spatium* $\alpha\mu\xi$ (hoc est *Summa tangentium in arcu* A M ad rectam $\alpha\mu$ applicatarum) æquatur *spatio hyperbolico* A F Z K.

Patet ex hujusce Lectionis 9. III.

III. Curva AXX talis sit, ut PX secanti CS (vel CT) æquetur; *spatium* ACPX hoc est *Summa secantium ad arcum* AM pertinentium, & ad CB applicatarum) æquatur *duplo sectori* ACM.

Nam (a) *spatium* AF MX *Segmenti* AFM *duplum* est; & *rectangulum* FCPM *Trianguli* FCM. ergo *totum spatium* ACPX totius *sectoris* AC M duplum est. Fig. 166. (a) 10. Lect. XI.

Etiam hoc è 16. hujus duodecimæ Lectionis apertè constat.

IV. Curva CVV talis sit, ut PV *Tangenti* AS æquetur; erit *spatium* CVP (hoc est *summa tangentium ad arcum* AM *pertinentium*, & ad rectam CB applicatarum) æquale *semissi quadrati ex subtensa* AM. Fig. 166.

Manifestè consectatur ex septima undecimæ Lectionis.

V. Acceptâ CQ = CP; & ductâ QO ad CE parallelâ (quæ *hyperbolæ* LE occurrat in O) erit *spatium hyperbolicum* PLOQ ductum in *radium* CB (seu *cylindricum* ad basin PLOQ, altitudine BC (duplum *summæ quadratorum* ex rectis CS, seu PX ad *arcum* AM pertinentibus, & ad rectam CB applicatis. Fig. 166.

Nam quia PL. QO:: (BQ. BP. hoc est::) BC + CP. BC — CP; erit componendo PL + QO. QO:: 2BC. BC — CP. item est QO. BC:: BC. BC + CP; ergò (pares rationes adjungendo) est PL + QO. QO + QO. BC = 2BC. BC — CP + BC. BC + CP; hoc est PL + QO. BC:: 2BCq. BCq — CPQ (hoc est::) 2BCq. PMq. verùm est PXq. BCq:: BCq. PMq. vel (antecedentes duplando) 2PXq. BCq:: 2BCq. PMq. ergò PL + QO. BC :: 2PXq. BCq. vel PL × BC + QO × BC. BCq:: 2PXq. BCq. quare PL × BC + QO × BC = 2PXq. itaque BC in omnes PL + QO ducta adæquat omnia totidem PXq. unde constat Propositum.

VI. Hinc spatium $\alpha\gamma\downarrow\mu$ (hoc est *summa secantium in arcu* AM ad $\alpha\mathfrak{C}$ applicatarum) æquatur *subduplo spatio hyperbolico* PLOQ. Fig. 167.

Nam sumatur arcus MN indefinitè parvus, & huic æqualis recta $\mu\nu$, ducatúrque recta NR ad AC parallela. Estque MN. MR :: (MC. CF:: CS. CA :: PX. CA ::) PXq. PX × CA. adeóque MN × PX × CA = MR × PXq. seu $\mu\nu \times \mu\downarrow \times$ CA = MR × PXq. atqui (ex præcedente) omnium MR × PXq summa spatii PLOQ in CA ducti subdupla est. Ergò omnia totidem $\mu\nu \times \mu\downarrow$ in CA ducta eidem subduplo æquantur. quare spatium $\alpha\gamma\downarrow\mu$ (omnibus

nibus $\mu\nu \times \mu\psi$ par) æquatur subduplo spatii PLOQ.

Fig. 167. VII. Omnia quadrata ex rectis $\mu\psi$ (ad rectam $\alpha\mu$ applicais) æquant CA × CP × PX (hoc est *parallelipipedum Base Rectangulo* ACPD, *Altitudine* CS).

Hujus *Effati demonstrationem* (quanquam περίχειρον) transilio; quoniam aliud *Schema* discursúmque præ reliquis plerísque longiusculum exposcit; neque rem tanti video.

Fig. 166. VIII. Curva AYY talis sit, ut FY æquetur ipsi AS; ductâ tum rectâ YI ad AC parallela, erit etiam *spatium* ACIYYA (hoc est *summa Tangentium* ad *arcum* AM pertinentium, & ad rectam AC applicatarum, unà cum *rectangulo* FCIY) æquale *subduplo spatio hyperbolico* PLOQ.

(a) 1. Lect. XII. (b) 14. Lect. XII. Nam *spatium* $\alpha\gamma\pi\mu$ (a) æquatur *rectangulo* ACPD; hoc est *rectangulo* FCIY (nam est CA.AS :: CF.FM; vel CA.FY :: CF.CP. adeoq; CA×CP = FY×CF). item spatium $\gamma\pi\psi$ (hoc est omnes rectæ TF ad αC applicatæ, quotquot ad arcum AM pertinent) (b) æquatur *spatio* AFY; ergo *spatium* ACIYA æquatur *spatio* $\alpha\gamma\psi\mu$; hoc est (ut mox ostensum) *semissi spatii hyperbolici* PLOQ.

Aliter illud, (eíque connexa) dimensus sum, *hoc præmisso Lemmate*.

Fig. 168. IX. Sit *Hyperbola æquilatera* (axes nempe pares habens) ERK ad cujus axes CED, CI; & ad hos ordinatæ KI, KD; sit item curvâ EVY talis, ut in *hyperbola* liberè sumpto puncto R, ductâque recta RVS ad DC parallelâ, sint SR, CE, SV continuè proportionales; connexâ rectâ CK, erit *Spatium* CEYI *Sectoris hyperbolici* KCE duplum.

Nam ducatur RT *hyperbolam* tangens, & RH ad CI parallela. Estque CH : CE :: CE . CT. quare CT = SV; vel HT = RV. itaque *Spatium* EDKY duplum est *segmenti* EDK. item *rectangulum* IKDC *trianguli* CDK duplum est; ergò *reliquum spatium* CEYI *reliqui sectoris* ECK duplum est.

10. Lect. XI.

Fig. 169. X. Resumptâ jam quadrante circulari ACB, sit CE = CA; & axe AE, *parametro* etiam AE, descripta sit *Hyperbola* EKK; positóque curvam AYY talem esse, ut ordinatâ quâcunque rectâ MFY, sit FY tangenti AS æqualis; ducatur recta YIK (rectam CZ,

C 2 secans in I, *hyperbolam* in K) & connectatur C K ; erit spatium A G I Y A *sectoris hyperbolici* E C K duplum.

Nam est C Iq. C Aq :: A Sq. C Aq :: F Mq. C Fq :: C Aq — C Fq. C Fq. componendoque, C Iq + C Aq. C Aq :: C Aq. C Fq. hoc est (ex *hyperbolæ* natura) I Kq. C Aq :: C Aq. C Fq. vel I K. C E :: C E. I Y. itaque *spatium* A C I Y A *sectoris* E C K duplum esse perspicuum est è præcedente. Fig. 169.

XI. *Coroll.* Hinc si *Polo* E, *Chordâ* C B, *Sagittâ* C A descripta sit *Conchois* A V V, cui occurrat Y F M producta in V ; erit M V = F Y ; adeóque *spatium* A M V *spatio* A F Y æquatur.

XII. Unde *spatiorum* ejusmodi *Conchoidalium dimensiones* innotescunt.

XIII. Nescio, an *opera* sit hoc adjicere *Corollarium.*

XIII. Sit recta A E rectæ R S perpendicularis ; & C E = C A ; sintque duæ (sibimet inversæ) *Conchoides* A Z Z, E Y Y ad eundem *polum* E, *communémque regulam* R S descriptæ, ab E verò ducatur utcunque recta E Y Z (lineas intersecans, ut vides) sit etiam *hyperbole æquilatera*, E K K, cujus *centrum* C, *semiaxis* C E ; ductâque I K ad A E parallelâ, connectatur C K, erit *spatium quadrilineum* A E O Y Z P A (rectis A E, Y Z, & *conchis* E O Y, A P Z comprehensum) æquale *quadruplo sectori Hyperbolico* E C K. Fig. 170.

Nam si *centro* E per C ducatur *arcus circularis* C X ; è dictis facilè colligetur *spatium* A P Z I C æquari *duplo sectori Hyperbolico* E C K unà cum *sectore circulari* C E X. item *spatium* E O Y I C æquari *duplo sectori* E C K, *dempto sectore* C E X.

Ità quoque facile colligas. Ducantur Z F, Y G ad C S parallelæ ; & protrahantur G Y L, L I H. ac ob I Y = I Z, est F Z + G Y = 2 C I. & *trapezium* F G Y Z = *rectang.* E G L H = 2 C G × C I. ergò patet.

Adnotari potest, si lubet, ductâ A T ad C S parallelâ, protractâque E Z T, si ponatur N = 2 triang. C E I — 2 sect. E C K ; fore spat. E Z T + E O Y E = 2 N.

Nempe N + C X I = spat. A Z T. & N — C X I = spat. E O Y E.

XIV. Adjiciemus etiam hisce cognatam *Cissoidalis spatii* dimensionem.

Sit *Semicirculus* A M B (cujus centrum C) quem tangat recta A H ; eique congruens *Cissois* A Z Z cujus scilicet hæc proprietas est, Fig. 171.

Fig. 171. ut in *circumf.* A M B sumpto utcunque puncto M, & per hoc trajectâ rectâ B M Z, ductâque rectâ M F Z, quæ curvam A Z Z secet in Z, sit M Z = A S) in recta verò $\alpha\beta$ sumatur $\alpha\mu$ æqualis arcui A M, & ad $\alpha\mu$ applicentur rectæ perpendiculares $\mu\xi$ æquales *arcuum* A M *sinubus versis* A F; erit *spatium trilineum* M A Z *spatii* $\alpha\mu\xi$ *duplum*.

Nam sumatur *arcus* M N indefinitè parvus, & ei æqualis $\mu\nu$; ducatúrque recta N R ad A B parallela, connectatúrque recta C M. Estque jam A S. A B (2 C M) : : (F M . F B : :) A F . F M . & 2 C M. 2 M N : : C M. M N : :) F M . N R. quapropter erit ex æquo A S. 2 M N : : A F. N R; & ideò N R × A S = 2 M N × A F. hoc est N R × M Z = 2 $\mu\nu \times \mu\xi$. unde *spatium* M A Z *duplo spatio* $\alpha\mu\xi$ æquatur.

Hinc cum *spatii* $\alpha\mu\xi$ dimensio vulgò nota sit, & è suprà positis
Fig. 172. etiam facilè deducatur; habetur *spatii cissoidalis* M A Z *dimensio*. calculum ineat qui volet.

Ista claudet hoc *Consectariolum*:

XV. Sit *circuli quadrans* A C B, *circulúmque* tangant A H, B G;
Fig. 173. sintque curvæ K Z Z, L E O *hyperbolæ*, eædem quæ (a) superiùs. arcus verò sumptus A M in partes divisus concipiatur indefinitè multas
(a) 7, & 12. punctis N; per quæ trajiciantur radii C N; & his occurrant rectæ N X ad puncta X; *summa rectarum* N X (in radiis) æquatur spatio $\frac{AFZK}{Rad.}$; & *summa rectarum* N X (in parallelis ad A S) æquatur *spatio* $\frac{PLQO}{3\ Rad.}$.

Nam triangulum X M N triangulo S A C simile est; & inde X M. M N : : A S. C A. & X N. M N : : C S. C A. unde $XM = \frac{MN \times AS}{CA}$; & $XN = \frac{MN \times CS}{CA}$. & ità in reliquis; unde liquet Prositum, ex 2, & 7 harum.

APPEN-

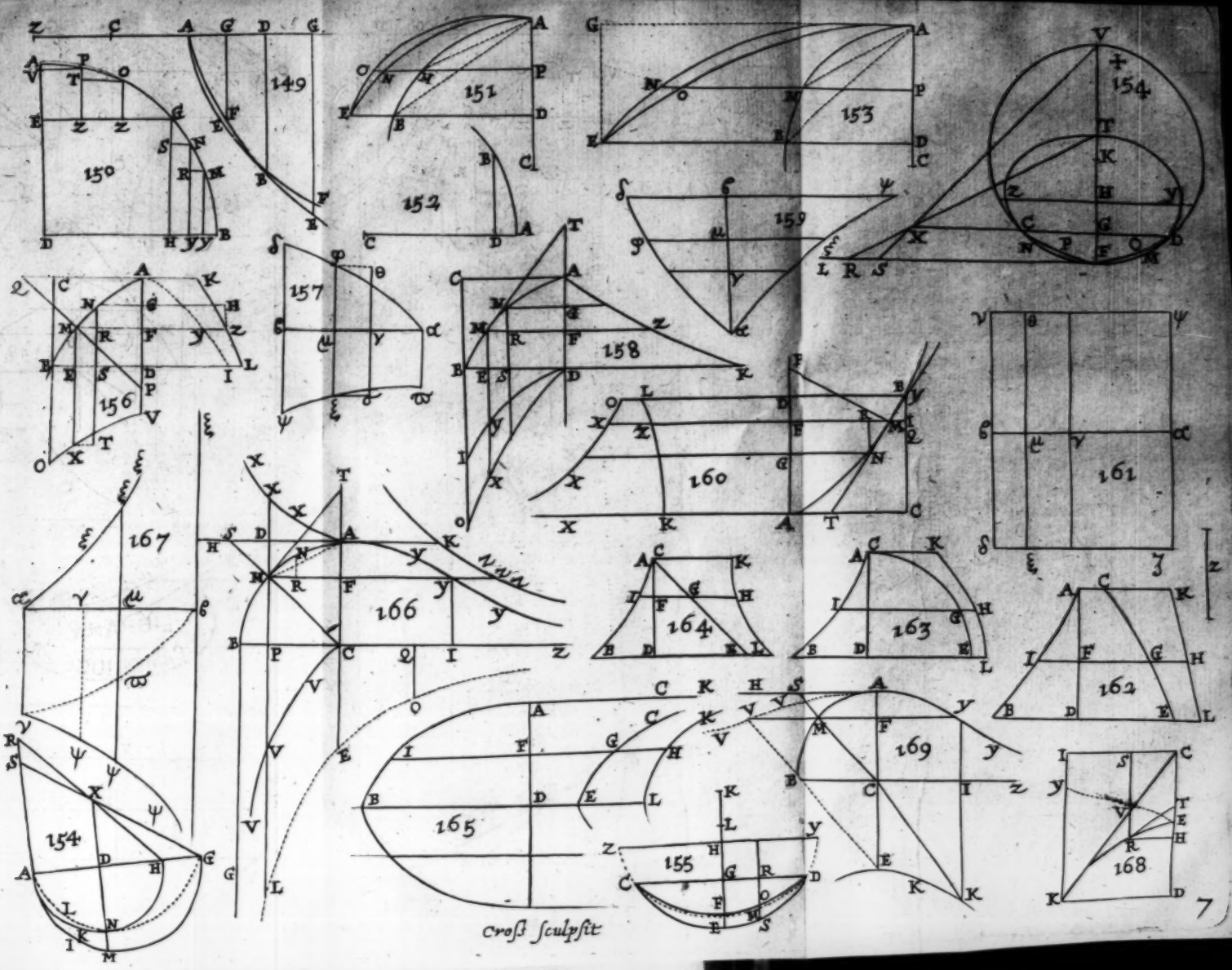

149
150
151
152
153
154
155
156
157
158
159
160
161
162
163
164
165
166
167
168
169
Cross sculpsit.
7

Fig. 171.

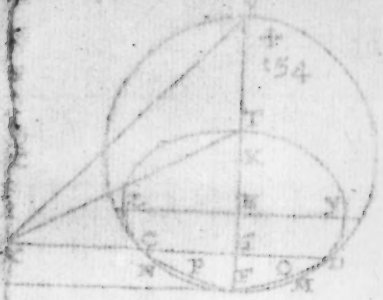


Fig. 172.

Fig. 173.
(a) 7, & 12.

APPENDICULA 2.

BRevitati simul ac perspicuitati (huic autem præcipuè) consulentes præcedentia recto discursu comprobata dedimus; quali non modò veritas, opinor, satis firmatur, at ejusdem origo limpidius appareret. Verùm nè quis, minùs hujusmodi ratiociniis adsuetus, hæreat, ista paucula subdemus, quibus tales discursus communiantur, quorumque subsidio non difficilè conficiantur *Propositorum demonstrationes apagogicæ.*

I. Sint quotlibet *rationes* A ad X, B ad Y, C ad Z, singulæ designatâ quâpiam ratione R ad S majores; erit *omnium antecedentium* (simul acceptarum) ad *omnes consequentes ratio* major ratione R ad S.

A . X .	A . M .
B . Y .	B . N .
C . Z .	C . O .

Nam sint rationes A ad M, B ad N, C ad O singulæ æquales rationi R ad S. ergò X ⊐ M; & Y ⊐ N; ac Z ⊐ O. patet igitur fore A + B + C. X + Y + Z ⊏ A + B + C. M + N + O. hoc est A + B + C. X + Y + Z ⊏ R. S.

II. Hinc patet, si quotlibet rationes singulæ designabili quâcunque majores sint, *antecedentium summam ad summam consequentium* etiam designabili quâcunque majorem rationem habere.

III. Sit curva quævis A D B, cujus axis A D, & ad hunc applica- Fig. 174.

ta recta BD, curvam verò tangat recta BT; sitque BP rectæ BD
Fig. 174. particula indefinitè parva, ducatúrque recta PO ad DT parallela, curvam secans ad N; dico PN ad NO rationem habere majorem quâvis designabili, puta quàm R ad S.

Nam sit DE. ET :: RS, connexaque recta BE curvam secet in G, rectam PO in K; per G verò ducatur FH ad DA parallela. quoniam igitur BP ponitur indefinitè parva, est BP ⊐ BF; adeóq; PK ⊐ PN (nam subtensa BG intra curvam tota cadit). ergò PN. NO ⊏ PK. KO :: DE. ET :: R. S.

IV. Hinc, si basis DB in partes secetur indefinitè multas ad puncta Z, & per hæc ducantur rectæ ad DA parallelæ curvam secantes punctis E, F, G; per hæc verò ducantur *Tangentes* BQ, ER, FS, GT parallelis ZE, ZF, ZG, DA occurrentes punctis Q, R, S, T; habebit recta AD ad omnes interceptas EQ, FR, GS, AT (simul sumptas) rationem quàvis assignabili majorem.

Nam ducantur rectæ EY, FX, GV ad BD parallelæ. Habent
Fig. 175. igitur rectæ ZE, YF, XG, VA ad rectas EQ, FR, GS, AT (singulæ ad singulas sibi in directum positas respectivè) rationem designabili quâcunque majorem. ergò simul omnes istæ ad has simul omnes *rationem* habent designabili quâvis *majorem*; hoc est recta AD ad EQ + FR + GS + AT ejusmodi rationem habet.

V. Hinc inter computandum, omnes EQ, FR, GS, AT simul acceptæ nihilo æquivalent; seu rectæ ZE, ZQ; & ZF, YR, &c. æquantur; item tangentium particulæ BQ, ER, &c. respectivis *curvæ* portiunculis BE, EF, &c. pares, & quasi coincidentes haberi possunt. quin & adsumere tutò licet, quæ evidenter his cohærent.

VI. Sit porrò *curva* quævis AB, cujus *Axis* AD, & ad hunc
Fig. 176. applicata DB; æquisecetur autem DB in partes indefinitè multas ad puncta Z, per quæ ducantur rectæ ad AD parallelæ, curvam AB intersecantes punctis X; quibus occurrant per ipsa X ductæ ad BD parallelæ rectæ ME, NF, OG, PH; sit autem segmento ADB (rectis AD, DB, & curvâ AB comprehenso) *circumscripta figura* ADBMXNXOXPXRA major *spatio* quodam S; dico *segmentum* ADB non esse minus quàm S.

Nam si fieri potest sit ADB minus quàm S excessu *rectangulum* ADLK adæquante, & quoniam AR est indefinitè parva, adeóque minor quàm AK, liquet rectangulum ADZR minus esse *rectangulo* ADLK.

ADLK, item patet *segmentum* ADB unà cum *rectangulo* ADZR majus esse *figurâ circumscriptâ* (etenim *rectangulum* ADZR *rectangulis* RH, PG, OF, NE, MZ æquatur, proindeque majus est *trilineis* AXR, XXP, XXO, XXN, XBM). ergo *segmentum* ADB unà cum *rectangulo* ADLK multo majus est *figurâ circumscriptâ*; hoc est, *spatium* S majus est *figurâ circumscriptâ*, contra *Hypothesin*. Fig. 176.

VII. Item, si ponatur *figura inscripta* HXGXFXEXZDH minor *spatio quodam* S, dico *segmentum* ADB non esse majus quàm S.

Nam si majus esse velis, esto rursum *excessus* par *rectangulo* ADLK, quod utique (sicut prius) majus erit *rectangulo* ADZR. Est autem *segmentum* ADB, dempto *rectangulo* ADZR, minus figurâ inscriptâ. ergò segmentum ADB, dempto rectangulo ADLK, multo minus sit inscriptâ figurâ; hoc est *spatium* S minus est inscriptâ figurâ, contra *Hypothesin*.

VIII. Hinc, si *spatium* quodcunque fuerit, (puta S) cui circumscripta figura æquetur *figuræ* ADBMNOPRA, nec non cui *inscripta figura æquetur figuræ* HGFEZDH; palàm est *spatium* istud S *segmento* ADB exæquari.

Nam (uti mox ostensum) hoc illo majus esse nequit, aut minus.

Poterunt autem hæc ad *alios circumscriptionis* ac *inscriptionis modos* accomodari. sufficerit innuisse.

Conicorum Superficies dimetiendi Methodus.

SIt *curva* quæpiam AMB, cujus *Axis* AD, & in hoc signatum punctum C; ad ipsum verò ordinata recta BD. à puncto quopiam M in curva sumpto ducatur recta ME curvam tangens, & à C demittatur CG ad ME perpendicularis; sit item determinata recta CV ad planam DAB recta, & connectatur VG (erit VG ipsi MG perpendicularis; nam si ducatur CH ad GM parallela, liquet CH plano GVG rectam esse, adeoque GM eidem recta erit) Porrò fit linea RS talis, ut ductâ rectâ MIX ad AD parallelâ (quæ secet ordinatam Fig. 177.

dinatam B D in I, & lineam R S in X) ſit M P. M E :: V G. I X; vel, ſit linea A L talis, ut ductâ M P Y ad B D parallelâ (quæ ſecet axem A D in P, & lineam A L in Y) ſit P E. M E :: V G. P Y; erit
Fig. 177. tunc utrumque *ſpatium* (ſingillatim) B R S D, vel A D L duplum *ſuperficiei conicæ*, quod ex recta per V & curvam A M B mota progeneratur.

Nam ſumatur M N indefinita curvæ particula, & per N ducantur rectæ N O K T ad ipſum A D, & N Q Z ad B D parallelæ (quæ lineas expoſitas, ut *Schranus* monſtrat, ſecent) connectantúrque rectæ V M, V N. eſtque M Q. M N :: M P. M E :: V G. I X. quare M N × V G = M O × I X = I K × I X. item eſt N O. M N :: P E. M E :: V G. P Y. unde M N × V G = N O × P Y = Q P × P Y. Eſt autem M N × V G duplum trianguli M V N. quapropter tam I K × I X, quàm Q P × P Y duplum eſt *trianguli* M V N. pariter autem ubique ſit. ergò conſtat Propoſitum.

Exemplum.

Fig. 177. Sit curva A M B *hyperbola æquilatera*, cujus *Centrum* C, ſitque C V = C A = *r*. & C P = *x* (nam hujuſmodi *calculo* plerunque rem expedit peragere) tum connexâ M C; patet eſſe $E C = \frac{r r}{x}$; & $M C q = 2 x x - r r$ (nam $P M q = x x - r r$) item eſt M C q. C P q :: M E q. M P q; hoc eſt M C q. C P q :: E C q. C G q. hoc eſt $2 x x - r r . x x :: \frac{r^4}{x x} . C G q = \frac{r^4}{2 x x - r r}$. quare $V G q = \frac{r^4}{2 x x - r r} + r r = \frac{2 r r x x}{2 x x - r r} = \frac{V A q \times C P q}{M C q}$. vel $V G = \frac{V A \times C P}{M C}$. quare V G. V A :: (C P. M C) :: M P. M E. hinc conſectatur in hoc caſu, quum ubique ſit I X = V A, *lineam* R S fore *rectam*; & *rectangulum* B R S D *ſuperficiei conicæ* A M B V *duplum eſſe*.

Cæterùm hoc *elegans exemplum* ſuppeditavit Generoſus, ingenio ac eruditione præſtans, Vir (*Collegii noſtri, quod olim Sociorum Commenſalis incoluit*, ornamentum) *D. Franciſcus Feſſopius*, Armiger; cujus in hanc rem perquam ingenioſo mihi comiter impertito ſcripto (ipſius injuſſu quidem, at ſpero non ingratiis) ſeu *Gemmâ* quâdam audebo mea condecorare.

Prop.

Prop. 1.

Si à puncto E in *axe* A*m coni recti* A B C*p* recta infinita E C transeat per *coni ſuperficiem*, & quieſcente termino E circumferatur recta E C donec redeat ad locum à quo cœpit moveri, ita ut ſemper aliqua pars ejus ſecet *coni ſuperficiem* (puta per *Hyperbolam* C F D & rectas D A A C in ſuperficie coni ſitas) *ſolidum comprehenſum à ſuperficie vel ſuperficiebus genitis à linea* E C ſic mota & à *portione ſuperficiei* ejuſdem coni terminatæ à linea vel lineis C F D, D A, A C quas recta E C circumlata deſcribit in *ſuperficie conica*, erit æquale *Pyramidi* cujus *Altitudo* eſt æqualis *perpendiculari* E *n* à puncto E ad latus *Coni* deductæ *baſis* verò æqualis eidem *ſuperficiei conica terminatæ* à linea vel lineis C F D, D A, A C generatis à motu lineæ E C. Fig. 178.

Solidum enim E C F, D A C conſtat ex *infinitis pyramidibus* E C, A E *o o* A, &c. æqualtis perpendiculari E *n*, quarum baſes omnes ſimul ſumptæ, exhauriunt *ſuperficiem conicam* C F D, D A, A C.

Prop. 2.

Datus ſit *Conus rectus* A B C*p* ſecetur à plano C F D axi A*m* parallelo ducantur rectæ A C, A D à vertice *coni* ad *lineam hyperbolicam* C F D, & ſuper *triangulo* A C D erigatur *pyramis* E A C D habens *verticem* E in *axe coni*; ſitque E *ſ* plano A C D perpendicularis, & E *n* lateri coni. Fig. 178.

Dico, *ſuperficies conica* terminata à *linea hyperbolica* C F D & rectis D A, A C ita ſe habet ad A C D *baſem pyramidis* E A C D ut *altitudo* E *ſ pyramidis* E A C D ad perpendiculum E *n*. Quoniam enim Conici A C F D, E C F D habent vertices A & E in plano baſi C F D (quæ eſt utrique Conico communis) parallelo ergo ſunt æquales. Si ergò à ſolido quod componitur à conico A C F D addito pyramide E C A D auferatur conicus E C F D reliquum erit ſolidum E C F D A C quale in propoſitione prima deſcribitur motu rectæ E C æquale pyramidi E A C D. Quoniam verò *æqualium pyramidum* reciprocæ ſunt *baſes altitudinibus*, ut *altitudo* E *ſ pyramidis* E A C D ad perpendiculum E *n* ita erit *ſuperficies conica* terminata à *linea hyperbolica* C F D & rectis D A, A C ad Triangulum A C D. q. E. D.

Prop.

Prop. 3.

Fig. 178. Datus ſit *Conus rectus* A B C *p*. Secetur à plano (puta *triangulo q r t*) quod quidem planum ſecabit *axem coni* in puncto *q* ſupra *vertiſem* productum & in communi interſectione cum *ſuperficie coni* habebit *lineam hyperbolicam* R S *t* ducantur à vertice coni A rectæ A *r*, A *t*, à puncto *q* demittatur perpendiculum *q* X lateri coni A *p* producto & à puncto A perpendiculum A Z plano *q r t*.

Dico *ſuperficies conica* terminata à *linea hyperbolica*, *r s t* & rectis *r* A, *t* A, ita ſe habet ad *figuram hyperbolicam cavam q r s t q* ut *perpendiculum* A Z ad *perpendiculum q* X.

Recta enim *qr*, circumlata, quieſcente termino *q* per lineas *rst*, *t* A, A *r* generat tres *ſuperficies*, nempe *hyperbolicam cavam q r*, *s t*, & *duo triangula q t* A, *q* A *r*, quæ unà cum *ſuperficie conica* terminata à lineis *r s t*, *t* A, A *r*, comprehendunt *Solidum q r s*, *t* A *r*. Hoc verò *ſolidum æquale* eſt *pyramidi* cujus *altitudo* eſt æqualis perpendiculo *q* X, nam infinitæ pyramides *q* A *r* V, *q* A V V, exhauriunt ſolidum *q r* S *t* A *r*. Si verò aliter contemplari volumus, hoc ſolidum *q r s t* A *r* poteſt conſiderari tanquam *figura conica* A *r* S *t q r* habens pro *baſe figuram hyperbolicam* cavam *q r* S *t q*, & pro altitudine *perpendiculum* A Z. Ergò reciprocando *baſes altitudinibus*, ut A Z ad *q* X, ita *ſuperficies*, *r* S *t* A *r* ad *figuram hyperbolicam cavam q r* S *t q*.

Prop. 4.

Fig. 179. Datus ſit *Conus rectus* A B *h g* ſecetur à plano H F E G per axem infra verticem, a puncto H ubi *planum* ſecat *axem coni*, demittatur H K *perpendiculum* lateri cuilibet coni & à vertice A *perpendiculum* A L plano H F E G.

Dico, *Superficies conica* terminata à lineis F E G G A A F ita ſe habebit ad *planum* H F E G ut *perpendiculum* A L ad *perpendiculum* H K.

Probatur eodem fere eodem fere argumento quo ſuperior.

Præcedentia

APPENDICULA 3.

Præcedentia recolenti nonnulla videntur elapſa, quæ forſan ex uſu ſit adjicere. *Demonſtrationes* elicere poterit quiſpiam è præmiſſis; & potior inde fructus emerget.

Problema I.

Fig. 180.

Sit *curva* quævis KEG, cujus *axis* AD; & in hoc ſignatum punctum A; curva reperiatur, puta LMB, talis, ut ſi ductâ utcunque rectâ PEM axi AD perpendicularis curvam KEG ſecet in E, & curvam LMB in M; nec non connectatur AE, & curvam LMB tangat recta TM; ſit TM ipſi AE parallela.

Hoc ità fiet. Per aliquodcunque punctum R, in axe AD ſumptum, protendatur recta RZ ad ipſam AD perpendicularis; cui occurrat recta EA producta in S; & in recta EP ſumatur PY = RS; ità determinetur curvæ OYY proprietas; tum ſit rectangulum ex AR, & PM æquale ſpatio AYYP (ſeu $PM = \frac{\text{ſpat. AYYP}}{AR}$) habebit curva LMMB conditionem propoſitam.

Adnotari poteſt, ſi ſtantibus reliquis, ſit curva QXX talis, ut eum hanc ſecet recta EP in X, ſit PX = AS; erit ſpatium AXXP æquale rectangulo ex AR, & curva LM, ſeu $\frac{AXXP}{AR} = LM$.

Exemp. I.

Sit ADG *circuli* quadrans, & ductâ EP ad AD utcunque perpendiculari, connexâque DE; deſignetur curva AMB talis, ut ſi producta recta EPM hanc ſecet in M, ipſamque tangat recta MT, ſit MT ad DE parallela. Hoc ita peragetur. Ducatur AZ ad DG parallela; & huic occurrat producta DE in S, & curva AYY talis ſit, ut ſi hanc ſecet producta PE in Y, ſit PY = AS; tum capiatur $PM = \frac{\text{Spat. AYP}}{AD}$; factum erit. Fig. 181.

Not. Quòd ſi curva QXX talis ſit, ut PX = DS (vel ſi AQ = AD, & QXX ſit *hyperbola* angulo ADG comprehenſa) erit curva AM × AD = ſpat. AQXP.

Exemp. II.

Fig. 182. Sit curva A E G (cujus *axis* A D) proprietate talis, ut ſi à quocunque puncto in ipſa ſumpto E, ducatur recta E P ad A D normalis; connectatúrque A E, ſit A E inter deſignatam A R, & A P proportione media, ſecundum ordinem, cujus exponens ſit $\frac{n}{m}$; reperiatur curva A M B, quam tangat T M ad A E parallela.

De curva A M adnoto fore $n . m :: A E . \text{arc. } A M$.

Si $\frac{n}{m} = \frac{1}{2}$ (vel A E ſit inter A R, A P ſimpliciter media) erit A E G circulus, & A M B *Cicloïs primaria*; hujus igitur dimenſio è lege generali habetur.

Hæc etiam ex adjuncto *Problemate* magis ccomprehenſivo peraguntur.

Probl II.

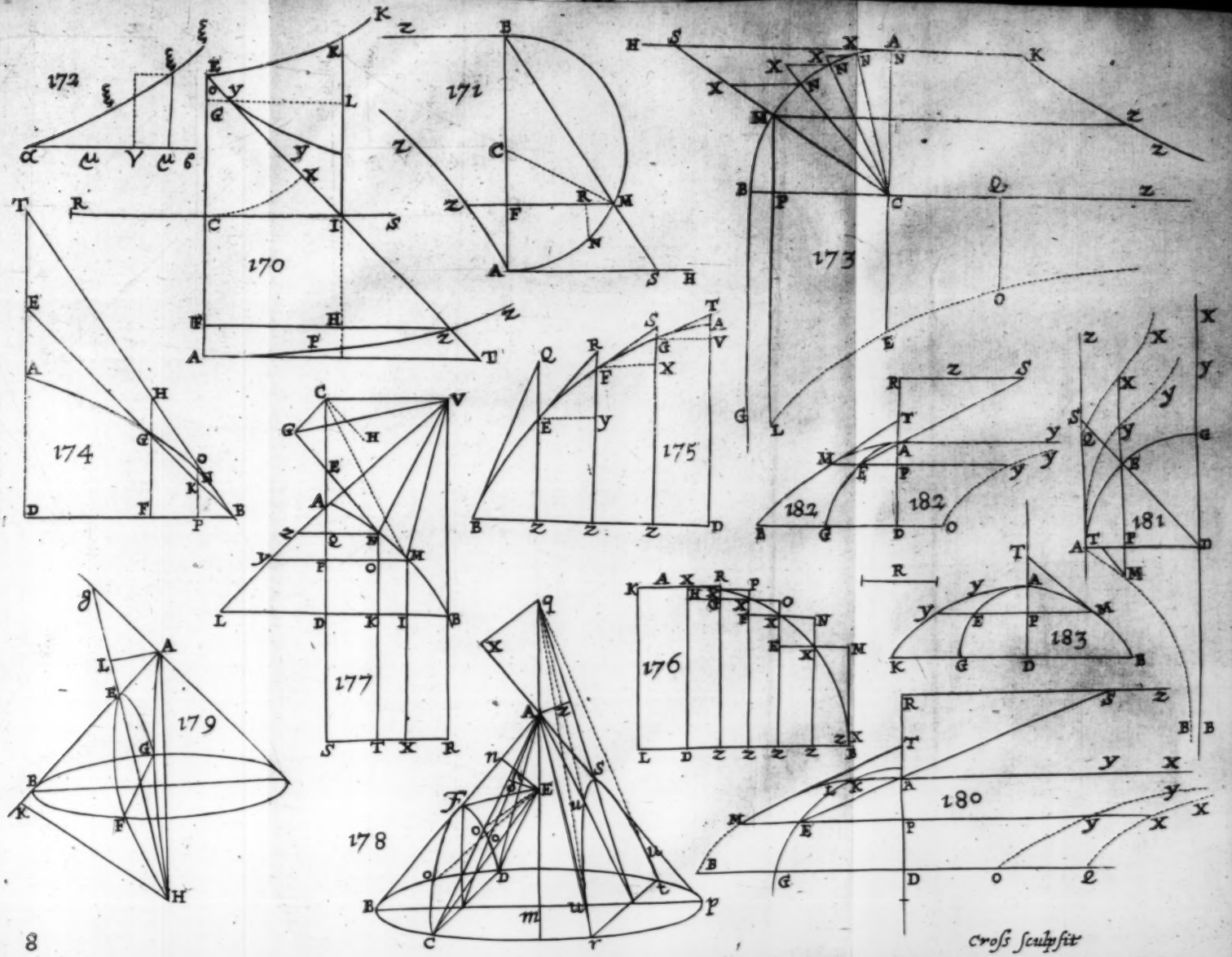
Fig. 183. Curva deſignetur, puta A M B, cujus *axis* A D, ità ut in hac ſumpto puncto quopiam M, & ductâ M P ad A D perpendiculâri, & poſito rectam M T ipſam tangere, habeant T P, P M relationem aſſignatam.

Accipiatur recta quæpiam R, & fiat ut T P ad P M (quam utique rationem aſſignatâ dabit relatio) ità R ad P Y (quæ nempe ſumatur in recta P M, & ad axem A D ordinetur) ſic ut per ejuſmodi puncta Y tranſeat curva Y Y K; tum ſi fiat $P M = \frac{\text{ſpat. A P Y}}{R}$; de curvæ A M B indè conſtabit natura.

Exemp. I.

Fig. 184. Sit A D G *circuli* quadrans; cujus radius æquetur deſignatæ R; & habere debeat T P ad P M rationem eandem quam habet R ad arcum A E; ergo quum ſit, juxta præſcriptum, R. arc. A E :: R . P Y; erit P Y = arc. A E; hinc habetur $P M = \frac{A P Y}{R}$.

Exemp.



Cross sculpsit

Fig. 18

Fig. 1

Fig.

Exemp. II.

Sit A D G *circuli* quâdrans, & habere debeat T P ad P M rationem eandem quam P E ad R; eſt ergo P Y æqualis *tangenti* arcûs G E, & ſpat. A P Y Y = R × arc. A E. adeóque P M = arc. A E.

Probl. III.

Proponatur figura quælibet A D B (cujus *axis* A D, *baſis* D B) reperiatur curva K Z L, proprietate talis, ut ductâ rectâ Z P M ad D B utcunque parallela quæ lineas expoſitas ſecet ut cernis) poſitóque rectam Z T tangere curvam K Z L, ſit intercepta T P æqualis ipſi P M. Fig. 185.

Hoc ità perficietur. Sit curva O Y Y talis, ut adſumptâ quâdam R, protractâque P M Y, ſit P M. R:: R. P Y; tum liberè adſumptâ D L (in B D protensâ) ſit D L. R:: R. L E; & *aſymptotis* D L, D G per E deſcribatur *Hyperbola* E X X; tum ſit ſpatium L E X H æquale ſpatio D O Y P, & protractæ X H, Y P concurrant in Z; erit Z in curva quæſita; quam ſi tangat Z T, erit T P = P M.

Adnotetur, ſi propoſita figura ſit *rectangulum Parallelogrammum* A D B C, quod curvæ K Z L hæc erit proprietas, ut ſit D H eodem ordine inter D L, D O media *Geometricè* proportionalis, quo D P inter D A & *o* (ſeu nihilum) eſt media *Arithmeticè*; quod ſi liberè juxta proprietatem hanc deſcribatur curva K Z L, & *Mechanicè* reperiatur tangens Z T, indè quadrabitur *hyperbolicum ſpatium* L E X H; erit utique hoc æquale *rectangulo* ex T P, A P. Fig. 186.

Subnotari poſſit fore 1. Spat. A D L K = R × D L − D O. 2. Summam Z P q = R ×: $\frac{DLq - DOq}{2}$. & ſummam Z P cub. = R × $\frac{DL\text{ cub.} - DO\text{ cub.}}{3}$ &c. 3. Si ponatur φ eſſe centrum gr. figuræ A D L K, ducantúrque φ ↓ ad A D, & φ ξ ad D L perpendiculares, fore φ ↓ = $\frac{DL + DO}{4}$, & φ ξ = R − $\frac{AD \times DO}{LO}$.

Probl. IV.

Fig. 187. Sit angulus B D H rectus, & B F ad D H parallela; & *asymptotis* D B, D H per F descripta sit *hyperbola* F X G; item centro D descriptus sit circulus K Z L; sit denuò curva A M B talis, ut in hac sumpto quocunque puncto M, & per hoc trajectâ rectâ D M Z, item sumptâ D I = D M; & ductâ I X ad B F parallelâ, sit *spatium hyperbolicum* B F X I æquale duplo *circulari sectori* Z D K; curvæ A M B tangens ad M determinetur.

Ducatur D S ad D M perpendicularis; sitque D B × B F = R q; fiátque D K. R :: R. P; tum D K. P :: D M. D T; & connectatur T M; hæc curvam A M B tanget.

Adnotetur curvæ A M B hanc esse proprietatatem; ut D I sit inter D B, D O (vel D A) eodem ordine *media proportionalis Geometricè*, quo arcus K Z inter *o* (seu nihilum) & arcum K L est medius *Arithmeticè*. hoc est, si D I sit numerus in serie *Geometricè proprtionalium* incipiente à D B, & terminatâ in D A; ac *o*, K L sint Logarithmi ipsarum D B, D A; erit K Z Logarithmus ipsius D I. Vel retrò (prout vulgares *Logarithmi* procedunt, si D I sit numerus in serie *Geometrica* exorsa à D O, & desinente in D B ac *o* sit *Logarithmus* ipsius D O, & arcus L K ipsius D B, erit arcus L Z *Logarithmus* ipsius D I.

Quod si absolutè construatur curva A M B, ejúsque *tangens Mechanicè* deprehendatur, inde patet *hyperbolici spatii Cyclismum* dari, vel *Circuli hyperbolismum*.

Hujusce *Spiralis* naturam, ac dimensionem (ut & Spatii B D A dimensionem) luculentè prosecutus est præclarissimus D. *Wallisius*, in Libro de *Cycloide*; quapropter de illa plura reticeo.

Probl. V.

Fig. 188. Sit spatium quodpiam E D G (rectis D E, D G, & linea E N G comprehensa) & data quædam R; curva A M B reperiatur talis, ut si utcunque à D projiciatur recta D N M, & D T ad hanc perpendicularis sit, & M T curvam A M B contingat; sit D T. D M :: R. D N.

Sit curva K Z L talis, ut D Z = $\sqrt{R \times DN}$; sumptâque liberè rectâ

rectâ DB, ſit DB.R::R.BF (ſit autem BF, ut & DH ipſi DB perpendicularis) tum per F, angulo BDH incluſa, tranſeat *hyperbola* FXX, ſitque ſpatium BFXI (poſitâ nempe IX ad BF *parallelâ*) æquale duplo ſpatio ZDL; ſit denuò DM = DG, erit M in curvâ quæſita; quam utique ſi tangat recta TM, erit TD.DM::R.DN.

Probl. VI.

Sit rurſus ſpatium EDG (ut in præcedente) reperienda eſt curva AMB, ad quam ſi projiciatur recta DNM, & ſit DT huic perpendicularis, & MT curvam AMB tangat, fuerit DT = DN. Fig. 188.

Adſumatur quæpiam R, & ſit $DZq = \frac{R^3}{DN}$; item acceptâ DB (cui perpendiculares DH, $BF = \frac{R^3}{DBq}$; & per F intra *aſymptotos* DB, DH deſcribatur *hyperboliformis* ſecundi generis (in qua nempe ordinatæ, ceu BF, vel IX, ſint quartæ proportionales in ratione DB ad R, vel DG ad R) tum capiatur ſpatium BIXF æquale duplo ZDL; & ſit DM = DI; erit M in curva quæſita; quam ſi tangat MT, erit DT = DN.

Probl. VII

Sit figura quævis ADB (cujus *axis* AD, *baſis* DB) & utcunque ductâ PM ad DB parallelâ datum ſit (ſeu expreſſum quomodocunque) ſpatium APM, oportet hinc ordinatam PM exhibere, vel exprimere. Fig. 189.

Acceptâ quâqiam R, ſit R × PZ = APM; hinc emergat linea AZZK; huic perpendicularis reperiatur ZO; tum erit PZ.PO::R.PM.

Exemp. AP vocetur x & ſit $APM = \sqrt{rx^3}$, ergo $PZ = \sqrt{\frac{x^3}{r}}$; unde reperietur $PO = \frac{3xx}{2r}$. Eſtque $\sqrt{\frac{x^3}{r}} \cdot \frac{3xx}{2r} :: r \cdot \frac{1}{2}\sqrt{rx} = PM$. unde AMB eſt *Parabola*, cujus *Parameter* eſt $\frac{2}{9}r$. *Aliter.*

Aliter. Fiat $PZ = \sqrt{2\,AP \times M}$. & ſit ZO curvæ AZK perpendicularis; erit $PM = PO$.

Exemp. Sit $AP = x$; & $APM = \frac{x^3}{r}$. quare $PZ = \sqrt{\frac{2x^3}{r}}$

unde reperietur $PO = \frac{3xx}{r} = PM$; & rurſus AMB erit *Parabola*.

Probl. VIII.

Fig. 190. Sit figura quævis ADB (rectis DA, DB, & linea AMB comprehenſa) & à D utcunque projectâ rectâ DM, datum ſit ſpatium ADM; oportet rectam DM definire.

Acceptâ quâpiam R, ſit $DZ = \frac{2\,ADM}{R}$; & ZO curvæ AZK perpendicularis; cui occurrat DH ad DM perpendicularis; erit $DM = \sqrt{R \times DO}$.

Aliter. Sit $DZ = \sqrt{4\,ADM}$; & ZO curvæ AZK perpendicularis; cui occurrat DH ad DZ perpendicularis; erit $DM = \sqrt{DZ \times DO}$.

De figuris involutis & evolutis bellam ~~quidem~~ inſtituit *Præclarus Geometra D. Gregorius Alord.* Alienæ meſſi nollem ego falcem meam immittere, verùm liceat utcunque iſthuc pertinentes (aliud agenti quæ mihi ſe ingeſſerunt) unam aut alteram obſervatiunculam his intexere.

Probl. IX.

Fig. 191. Data ſit figura quæpiam ADB (cujus *axis* AD, *baſis* DB) oportet ei congruentem involutam exhibere.

Fig. 192. *Centro* C, intervallo quopiam CL deſcribatur *Circulus* LXX; ſit autem curva KZZ talis, ut pro lubitu ductâ rectâ MPZ ad BD parallelâ,

rallelâ, ſit rectangulum ex PM, PZ æquale quadrato ex CL (vel $PZ = \frac{CL^q}{PM}$). Sit tum arc. $LX = \frac{\text{ſpat. } DKZP}{CL}$ (vel ſector LCX ſubduplus ſpatii DKZP) & in CX capiatur $C\mu = PM$, erit linea $C\mu\mu$ ipſius BMA involuta; vel ſpatium $C\mu c$ ſpatii ADB.)

Exemp. Sit ADB circuli quadrans; erit ergò (quod è præmonſtratis conſtat) ſpat. DKZP (2 ſector LCX). ſect. BDM :: CLq. DBq. unde arc. LX. arc. BM :: CL. DB. quare ang. LCX = ang. BDM = ang. DMP. unde ang. $C\mu c$ eſt rectus, adeóque linea $c\mu C$ eſt *ſemicirculus.*

Coroll. 1. Subnotari poteſt, ſi duæ figuræ ADB, ADG analogæ fuerint; & harum *involutæ* ſint $C\mu c$, $C\gamma\gamma$, & fuerit $C\mu . C\gamma$ :: DB. DG; erit reciprocè ang. $cC\mu . c C\gamma$ :: DG. DB. Fig. 193.

2. Illud etiam converſè valet.

3. Sin curvæ $C\gamma\gamma$, CSc ſuo modo analogæ fuerint, hoc eſt, ſi utcunque à C projectâ rectâ $C\gamma S$, habeant $C\gamma$, CS eandem perpetuò rationem, erunt hæ ſimilium linearum *involutæ.* Fig. 194.

Probl. X.

Data figurâ quâpiam $cC\varphi$ rectis Cc, $C\varphi$, & aliâ lineâ $c\varphi$ comprehenſâ, ei competentem *evolutam* deſignare. Fig. 195.

Centro C utcunque deſcribatur *circularis arcus* LE (cum rectis Cc, $C\varphi$ conſtituens ſectorem LCE) tum ductâ CK ad LC perpendiculari, ſit curva cYH ità rectam CK reſpiciens, ut liberè projectâ rectâ $C\mu Z$, ſumptâque CO = arc LZ, ductâque OY ad CK perpendiculari, ſit $OY = C\mu$; porrò ad rectam DA ſic referatur curva BMF, ut cùm ſit $DP = \frac{\text{ſpat. } CcYO}{CL}$; & PM ad DA perpendicularis; ſit etiam $PM = C\mu$; erit ſpatium DBFA ipſius $Cc\varphi$ *evolutum.* Fig. 196.

Exemp. Sit LZE arcus circuli centro C deſcripti, & $c\mu C$ ejuſmodi *ſpiralis* Fig. 197.

ſpiralis, ut pro arbitrio ductâ rectâ C μ Z habeat arcus E Z ad rectam C μ rationem aſſignatam (puta R ad S) Manifeſtum eſt lineam c Y H eſſe rectam, quoniam E Z (K O). C μ (O Y) :: R. S, perpetuò.
Fig. 198. unde evoluta B M F ſit *Parabola*; quoniam axis partes A P, A D ſe habent ut ſpatia K O Y, K C c, hoc eſt ut quadrata ex ipſis O Y, C c, vel ex ipſis P M, D B.

Corol. Theor. I.

Si ad figuram c C φ erigatur *cylindricus* altitudinem habens æqualem peripheriæ integræ *circuli*, cujus radius C L; erit iſte *cylindricus* æqualis *ſolido*, quod procreatur è figurâ C c H K circa axem C K rotatâ.

Theor. II.

Fig. 195. Sit curva quæpiam A M B (cujus axis A D, baſis D B) & curva A Z L talis, ut liberè ductâ rectâ Z P M, ſit P Z = √ 2 A P M; ſit item alia curva O Y Y talis, ut ad hanc productâ rectâ Z P M Y, adſumptâque rectâ R, ſit Z P q . R q :: P M . P Y; ſitque denuò D L.
Fig. 199. R :: R . L E. & per E intra angulum L D G deſcribatur *Hyperbola* E X X; huic autem occurrat ducta recta Z H X ad A D parallela, erit ſpatium P D O Y æquale *ſpatio Hyperbolico* L H X E.

Hinc *ſumma* omnium $\frac{PM}{APM} = \frac{2LEXH}{Rq}$.

Theor. III.

Sit curva quæpiam A M B, cujus axis A D, baſis D B; & curva K Z L talis, ut adſumptâ quâdam R, & arbitrariè ductâ rectâ Z P M ad B D parallelâ, ſit √ A P M . P M :: R . P Z; erit ſpatium A D L K
Fig. 200. æquale *rectangulo* ex R in 2 √ A D B; vel $\frac{ADLK}{2R} = \sqrt{ADB}$.

Exemp. Sit A D B circuli quadrans, erit ſumma omnium $\frac{PM}{APM} = \sqrt{2}\,DA \times$ arc. AB.

Theor. IV.

Sit curva quæpiam A M B (cujus axis A D, baſis D B) ſintque duæ lineæ E X K, G Y L ità relatæ, ut in curva A M B ſumpto quopiam

am puncto M, ductíſque rectis MPX ad BD, & MQY ad AD parallelis, poſitóque rectam MT tangere curvam AMB, ſit TP. PM :: QY. PX; erunt figuræ ADKE, DBLG ſibimet æquales. Fig. 201.

Valet hoc converſum. Nempe ſi figuræ ADKE, DBLG æquentur, & MT curvam AMB tangat, erit TP. PM :: QY. PX.

Not. Omnium hactenus Propoſitorum fœcundiſſimum eſt hoc *Theorema*; præcedentium quippe complura vel in eo continentur, aut ab eo facilè conſectantur. Nam poſito lineam AMB indeterminatam eſſe naturâ, ſi ipſarum EXK, GYL alterutra pro tuo arbitratu determinetur, exinde reſultabit Theorema quoddam ejuſmodi, qualia ſuperiùs exhibentur aliquammulta. Si *e. g.* linea GYL ponatur recta cum ipſa BD ſemi-rectum conſtituens angulum (quo caſu concipiuntur puncta D, G coincidere) proveniet indè prima *Lectionis* XI. Si GYL ſit recta ad DB parallela, emerget *Lectionis ejuſdem*. Rurſus ſi PM = PX (vel lineæ AMB, EXK ſint eædem) conſequetur hinc *decima* ejuſdem. Exhinc porrò liquet adſumpto cuilibet ſpatio *infinita, genere diverſa, ſpatia æqualia* facilè deſignari veluti ſi *ſpatium* DGLB ponatur *circuli quadrans*, cujus *centrum* D; & curva AMB ſit *parabola*, cujus *axis* AD, emerget curvæ EXK hæc proprietas, ut (ſi dicatur DB = *r*; AP = *x*; PX = *y*; & *k* (vel $\frac{DBq}{2AD}$) ſit *parabolæ ſemiparameter*) ſit $\frac{rrk}{z} = kkx + xyy$. Sin AMB ponatur *hyperbola*, procreabitur alterius generis curva EXK. Fig. 202. his autem expenſis ἀβλεψίαν meam incuſo, qui non hoc *Theorema* (ſicut & ea quæ ſubſequuntur, quorum ferè ratio conſimilis eſt, & ſuppar uſus) primo loco poſuerim, & ex eo (nec non è reliquis mox ſubjiciendis) quod fieri poſſe video, reliqua deduxerim. Veruntamen hujuſmodi *Phrygiam ſapientiam* juxta mecum pleriſque familiarem autumo, literas has tractantibus.

Theor. V.

Sit ſpatium quodpiam ADB (rectis DA, DB, & curva AMB comprehenſum) ſint item curvæ EXK, GYL ità relatæ, ut ſi in curva AMB liberè ſumatur punctum M, ducatur DMX, ſit DQ = DM, ducatur QY ad DB perdendicularis, ſit DT ad DM perpendicularis, recta MT curvam AMB contingat; ſi, his inquam ſuppoſitis, ſit TD. DM :: DM × QY. DXq; erit ſpatium DGLB ſpatii EDK duplum. Fig. 203.

Theor. VI.

Fig. 204. Sit rursus A M B curva quævis (cujus axis A D, basis D B) & curvæ E X K, H Z O ita versus se, & axes A D, α ς relatæ, ut arbitrariè in curva A M B accepto puncto M, & ductâ M P X ad A D perpendiculari, sumptâ α μ = arc A M, ductâ μ Z ad α ς perpendiculari, positóque rectam T M curvam A M B tangere; sit T P. T M :: μ Z. P X; erunt spatia A D K E, α ς O H æqualia sibi.

Theor. VII.

Fig. 204, 205. Sit spatium quodpiam A D B (rectis D A, D B, & curvâ A M B definitum) sint item curvæ E X K, H Z O ità relatæ, ut si quodvis capiatur punctum M in curva A M B, projiciatur recta D M X, sumatur α μ = arc A M; ducatur μ Z ad rectam α ς perpendicularis; sit D T perpendicularis ipsi D M; recta M T curvam A M B tangat, sit T D. T M :: D M × μ Z. D X q; erit spatium α ς O H spatii E D K duplum.

Sed horum hic esto terminus.

LECT

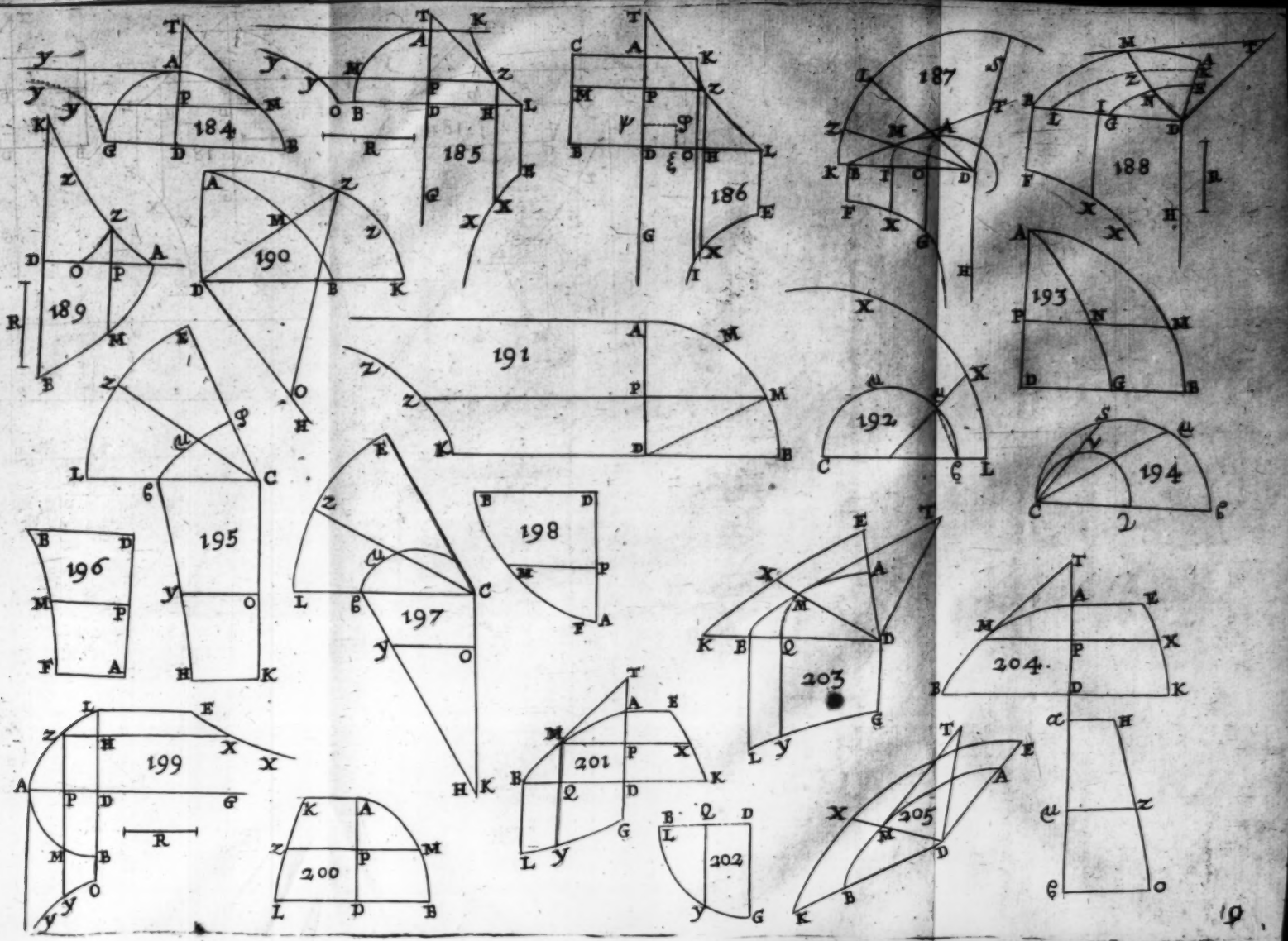

184
185
186
187
188
189
190
191
192
193
194
195
196
197
198
199
200
201
202
203
204.
205

Fig. 1

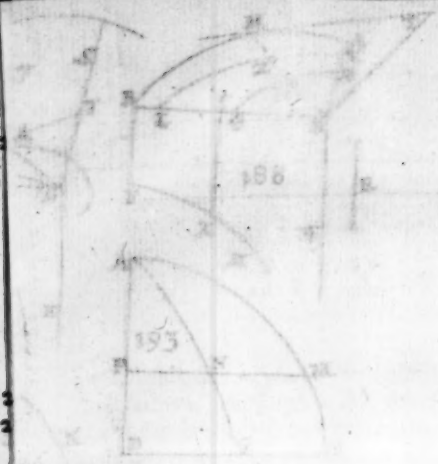
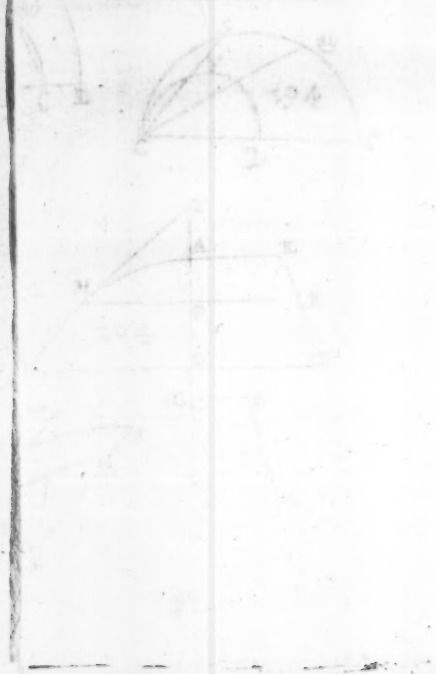


Fig. 2



LECT. XIII.

ÆQuationum naturam è terminorum *analogia* expoſuit *Vieta*; illam ex eorum in ſe ductu dilucidiùs explicuit *Carteſius*. Eam ego jam è linearum ſingulis appropriatarum deſcriptione conabor aliquatenus enucleatam dare; qui ſanè modus rem præſertim elucidare videtur, ac ob oculos ponere, agedum.

Notetur, In ſequentibus perpetim ad eaſdem ſeries redigi æquationes, quæ *coefficientes* habent eaſdem.

Æquationum Series prima.

$$a + b = n.$$
$$aa + ba = nn.$$
$$a^3 + baa = n^3.$$
$$a^4 + ba^3 = n^4, \&c.$$

Sumatur recta B A æqualis coefficienti *b*, & hæc verſus H indefinitè protendatur; ſint anguli R A H, S B H ſemirecti, ſintque lineæ A L L, A M M, A N N tales, ut rectâ G K ductâ ad A H utcunque perpendiculari (quæ dictas lineas ordine ſecet punctis L, M, N; rectaſque B S, A R punctis K, Z) ſit inter G Z, G K *media* G L *, *bimedia* G M, *trimedia* G M; hæ lineæ propoſitarum æquationum naturæ explicandæ inſervient. Nam ſi A G (vel G Z) dicatur *a*; erit B G (vel G K) $= b + a$; atque G L q $= aa + ba$; & G M cub. $= a^3 + baa$; & G N q q $= a^4 + ba^3$. Fig. 206.

* Vid. *pag.* 90.

Notetur autem,

1. Ducta A D ad B H perpendiculari, ſi in hac capiatur A E = *n*; ducatúrque E F ad A H parallela; hujus cum lineis expoſitis interſectiones æquationum propoſitarum radices exhibebunt reſpectivè; erit utique F K, vel E L, vel E M, vel E N æqualis ipſi *a*; hoc eſt ipſis A G, concipiendo à ſingula interſectione deduci ad A H perpendiculares, quæ puncta G determinet.

Fig. 206.

2. Quò punctum G magis à termino A removetur (& quidem poteſt G A deſumi quavis deſignatâ major) eò ordinatæ G K, G L, G M, G N magis increſcunt; adeo ut quantacunque ponatur A E, parallela E F curvis occurſura ſit; & proinde ſemper habetur vera radix iſtarum æquationum cuilibet conveniens; & ea tantùm una, quoniam E F curvas iſtas unico puncto interſecat.

3. *Curva* A L L eſt *hyperbola æquilatera*, cujus *axis* A B, reliquæ A M M, A N N ſunt *hyperboliformes*.

4. Si A O ſit $\frac{1}{2}$ A B; & A P = $\frac{1}{3}$ A B, & A Q = $\frac{1}{4}$ A B, ducantúrque O T, P V, Q X ad B S parallelæ, erunt hæ curvarum A L L, A M M, A N N *aſymptoti*.

5. Hinc conſtat in ſecundo gradu fore $a \sqsubset n - \frac{b}{2}$; in tertio $a \sqsubset n - \frac{b}{3}$; in quarto $a \sqsubset n - \frac{b}{4}$; quæ tamen inæqualitates, ſi A E benemagna ſit, exiguæ erunt.

6. Æquationibus iſtis nulla competit *maxima*, *vel minima*.

Series ſecunda.

$$a - b = n.$$
$$aa - ba = nn.$$
$$a^3 - baa = n^3.$$
$$a^4 - ba^3 = n^4, \text{ \&c.}$$

Fig. 207.

Sit rurſus A B = *b*; & indefinitè protrahatur A B verſus I, & ſint anguli R A I, S B I ſemirecti; tum concipiantur curvæ B L L, B M M, B N N tales, ut ſi utcunque ducatur G Z ad A I perpendicularis (dictas lineas ſecans, uti cernis, punctis K, L, M, N, Z) ſit inter G Z,

GZ, GK media GL, bimedia GM, trimedia GN; propositas æquationes explicabunt hæ lineæ. Nam si AG (vel GZ) vocetur a; erit BG (vel GK) $= a - b$, & GLq $= aa - ba$, & GM cub. $= a^3 - baa$; & GNqq $= a^4 - ba^3$.

Not.

1. Ductâ AD ad AI perpendiculari, & EF ad AI parallelâ, si AE ponatur æqualis ipsi n, erunt EK, EL, EM, EN radices æquationum respectivæ, seu æquales quæsitis a.

2. Quoniam ordinatæ GK, GL, GM, GN à termino B versus I infinitè excrescunt, semper habetur una vera radix, & unica.

3. Curva BLL est *hyperbola aquilatera*, cujus *axis* AB, reliquæ curvæ sunt *hyperboliformes*.

4. Si AB bisecetur in O, trisecetur in P, quadrisecetur in Q, ducanturque ad AR parallelæ OT, PV, QX, erunt hæ curvarum BLL, BMM, BNN *asymptoti*.

5. Hinc sequitur in secundo gradu fore $a \sqsubset n + \frac{b}{2}$; in tertio $a \sqsubset n + \frac{b}{3}$; in quarto $a \sqsubset n + \frac{b}{4}$; quòd si n satis magna sit, istæ inæqualitates ad æqualitatem proximè accedunt.

6. Verarum in his radicum habetur *minima*; scilicet ipsa AB, vel b.

Series tertia.

$b - a = n.$
$ba - aa = nn.$
$baa - a^3 = n^3.$
$ba^3 - a^4 = n^4.$ &c.

Sit AB $= b$, & anguli RAB, SBA semirecti; tum curvæ ALB, AMB, ANB tales, ut ductâ rectâ GK ad AB utcunque perpendiculari (quæ lineas expositas secet, ut vides) sit inter AG (seu GZ) & GK *media* GL, *bimedia* GM, *trimedia* GN; propositas æquationes explicatas dabunt hæ lineæ. Nam posito fore AG $= a$, erit GK $= b - a$; & GLq $= ba - aa$; & GMq $= baa - a^3$. & GNq $= ba^3 - a^4$. Fig. 280.

Not.

Not.

Fig. 208. 1. Si in A D (ad ipſam A B perpendiculari) deſumatur A E = n, & ducatur E F ad A B parallela, hujuſce cum lineis expoſitis interſectiones exhibebunt radices a reſpectivè.

2. Cùm ad haſce curvas ordinatæ ſemper terminatæ ſint, & inter ipſas maxima quædam detur, hujus *ſeriei æquationes*, pro modulo aſſignatæ A E (vel n) ſubinde duas radices veras habent (cùm utique fuerit A E curvæ maximâ ordinatâ minor reſpectivè, hoc eſt cùm E F curvæ bis occurrerit) nonnunquam duntaxat unam (cum A E nempe maximam adæquet, adeóque E F curvam contingat) aliquando nullam (cum ſcilicet A E maximam excedat, adeóque nec E F curvæ unquam occurrat).

3. In ſecundo gradu ſi A O = O B, & ordinetur O T, erit O T maxima, (adeóque radicum una major quàm $\frac{A B}{2}$, altera minor) in tertio, ſi A P = 2 P B, & ordinetur P V, erit P V maxima (unde radicum una major erit quàm $\frac{1}{3}$ A B, altera minor) demùm in quarto gradu ſi A Q = 3 Q B, & ordinetur Q X, erit Q X *maxima* (& hinc una radicum ſemper major, quàm $\frac{1}{4}$ A B, & altera minor).

4. Hinc conſectatur, ſi fuerit, in ſecundo gradu $n \sqsubset \frac{b}{2}$; in tertio $n^3 \sqsubset \frac{4b^3}{9} - \frac{8b^3}{27} = \frac{4b^3}{27}$; in quarto $n^4 \sqsubset \frac{27}{64}b^4 - \frac{81}{256}b^4 = \frac{27b^4}{256}$; nullam dari radicem.

5. Omnium radicum *maxima* eſt ipſa A B, vel b.

6. Omnium curvarum communis *interſectio* (ſeu *nodus*) eſt punctum T; & ſi fuerit $n = \frac{b}{2}$; ſemper A O (vel $\frac{b}{2}$) eſt una radix.

7. Curva A L B eſt *Circulus*, reliquæ A M B, A N B eum quodammodo referunt.

1.	2.	3.
$a + b = n$	$a - b = n$.	$b - a = n$.
$a + b = \frac{nn}{a}$	$a - b = \frac{nn}{a}$	$b - a = \frac{nn}{a}$
$a + b = \frac{n^3}{aa}$	$a - b = \frac{n^3}{aa}$	$b - a = \frac{n^3}{aa}$
$a + b = \frac{n^4}{a^3}$	$a - b = \frac{n^4}{a^3}$	$b - a = \frac{n^4}{a^3}$

Aliter

Aliter (& forte commodiùs, pro ſingulo trium ſerierum gradu tantùm unam adhibendo lineam) explicantur iſtæ præcedaneæ æquationes, hoc pacto:

Sit A H recta indefinitè protenſa, & huic perpendicularis A D; in qua ſumatur A B = *n*, & ducatur B K ad A H parallela, tum ſint lineæ L XL, M XM, N XN tales, ut ſumpto in A H quocunque puncto G, & ductâ G K ad A D parallelâ, ſit in proportione A G ad G K (vel A B) proportione *tertia* G L, *quarta* G M, *quintæ* G N; hæ lineæ propoſitarum æquationum naturæ explicandæ inſervient. Fig. 209, 210.

Nam ſumpta A E = *b* (ſumatur autem A E ob primam ſeriem ad partes I, ob ſecundam & tertiam ad partes H) & fiat angulus F E H ſemirectus (iſte quidem pro prima & ſecunda ſerie inclinans verſus H, pro tertia reclinans ab H, ut Schema ſatis monſtrat) cum rectæ E F cum expoſitis lineis interſectiones reſpectivæ radices *a* determinabunt, nempe ſi per has ductæ concipiantur ad A H perpendiculares (L G, M G, N G) erunt interceptæ A G radicibus *a* æquales reſpectivè.

Not.

Exhinc conſtat, quòd

1. In hac explicatione *coefficiens b* indeterminata habetur; ut in præcedentibus ipſa *n*.

2. In prima & ſecunda ſerie ſemper una poſitiva radix habetur, & unica.

3. In ſecunda ſerie minima radix ipſi A B, vel *n* æquatur.

4. Communis omnium linearum *nodus* eſt *punctum* X, ubi B X (vel *a*) = *n*.

5. In tertia ſerie ſubindè duæ habentur radices poſitivæ (quando ſcilicet E F curvas bis ſecat) nonnunquam una tantùm (cùm E F ipſarum aliquam contingat; id quod accidit in ſecundo gradu cùm $a = \frac{b}{2}$; in tertio cùm $a = \frac{1}{3}b$; in quarto cùm $a = \frac{1}{4}b$) aliquandò nulla, cùm E F infra tangentes cadit, & adeò nuſquam curvis occurrit.

6. Secundi gradûs curva eſt *hyperbola*, reliquæ *hyperboliformes*, quarum communes *aſymptoti* ſunt rectæ A H, A D.

Series

Series quarta.

$a + \frac{cc}{a} = n.$

$aa + cc = nn.$

$a^3 + cca = n^3.$

$a^4 + cc aa = n^4.$

Fig. 211. Sit recta indefinitè protensa AH, & huic perpendicularis AD; fiat autem angulus RAH semirectus; tum utcunque ducatur GZK ad AD parallela; & facto AG. AG :: AC. ZK; per K intra angulum DAR describatur *hyperbola* KXK; sint denuò curvæ CLL, AMM, ANN tales, ut inter GZ, GK sint *media* GL, *bimedia* GM, *trimedia* GN; hæ propositio deservient. Nam si AG (vel GZ) dicatur a, erit $GK = a + \frac{cc}{a}$; & $GLq = aa + cc$; & $GMcub = a^3 + cca$; & $GNqq = a^4 + ccaa$.

Not.

1. Designantur radices, ut in præcedentibus, positâ AE = n, & ductâ EF ad AH parallelâ.

2. Si AP = AC, erit PX ad *hyperbolam* KXK ordinatarum *minima*; unde si AE (vel n) $\sqcap$ PX; nulla dabitur radix in primo gradu.

3. Curva CLL est *hyperbola æquilatera*, cujus *centrum* A, *semiaxis* AC; quæ & ordinatarum est *minima*; alioquin si $n \sqsubset c$, semper una vera radix habetur, & unica.

4. Reliquæ AMM, ANN sunt hyperboliformes ad infinitum excurrentes; unde semper una vera radix habetur, neque plures.

5. Si fuerit $Y\alpha = \frac{1}{2} YX$; $Y\zeta = \frac{1}{3} YX$; $Y\gamma = \frac{1}{4} YX$, & per puncta α, ζ, γ, traductæ concipiantur *hyperbola* (habentes & ipsæ *asymptotos* DA, AR) $\alpha\lambda$, $\zeta\mu$, $\gamma\nu$; erunt hæ ipsarum curvarum CLL, AMM, ANN *asymptoti*. (Similes etiam *asymptoti* conveniunt lineis posthac describendis, quanquam de illis conticeamus.)

6. Hinc in secundo gradu $a + \frac{cc}{2a} \sqsubset n$; in tertio $a + \frac{cc}{3a} \sqsubset n$;

in

in quarto $a + \frac{cc}{4a} \sqsubset n$, quæ tamen inæqualitas eo minor est, quò AE (vel n) major existit.

$$a + \frac{cc}{a} = n.$$
$$a + \frac{cc}{a} = \frac{nn}{a}.$$
$$a + \frac{cc}{a} = \frac{n^3}{aa}.$$
$$a + \frac{cc}{a} = \frac{n^4}{a^3}.$$

Possit hæc series explicari juxta præcedentium modum secundum, & eâdem adhibendo curvas L X L, M X M, N X N, quarum nimirum proprietas est, ut rectâ GK ductâ ad AH utcunque perpendicu- Fig. 212.
lari, sit $GL = \frac{nn}{AG}$; & $GM = \frac{n^3}{AGq}$; & $GN = \frac{n^4}{AG\,cub.}$

Nam si fiat angulus HAR semirectus, & utcunque ducatur GEO ad AH perpendicularis; & sit GE. c :: c. EO; & per O intra asymptotos AD, AR describatur *hyperbola* OO; hujusce cum expositis lineis L X L, M X M, N X N intersectiones, radices a respectivas determinabunt; ductis utique LG, MG, NG ad AH perpendicularibus; erunt interceptæ AG ipsis a æquales respectivè.

Possint consimili modo subsequentes omnes æquationes explicari; sed eas modo duntaxat priore dabimus expositas.

Series quinta.

$$\left.\begin{array}{l} \frac{cc}{a} - a = n. \\ cc - aa = nn. \\ cca - a^3 = n^3. \\ ccaa - a^4 = n^4. \end{array}\right\}$$ Fig. 213.

Series sexta.

$$\left.\begin{array}{l} a - \frac{cc}{a} = n. \\ aa - cc = nn. \\ a^3 - cca = n^3. \\ a^4 - ccaa = n^4. \end{array}\right\}$$

Fig. 213. Fiat angulus RAI semirectus, & AD ad AI perpendicularis; in qua $AC = c$; tum utcunque ductâ GZ ad AD parallelâ, sit AG (vel GZ). AG : : AG . ZK, & per K, intra angulum DAR describatur *hyperbola* KYK; tum sint curvæ CLYHLλ, AMYHMμ, ANYHNν tales, ut inter AG (vel GZ) & GK sit *media* GL, *bimedia* GM, *trimedia* GN; hæ proposito deservient.

Constat hoc, ut in præcedente; & quo pacto radices respectivè determinantur. Verùm adnotetur prætereà.

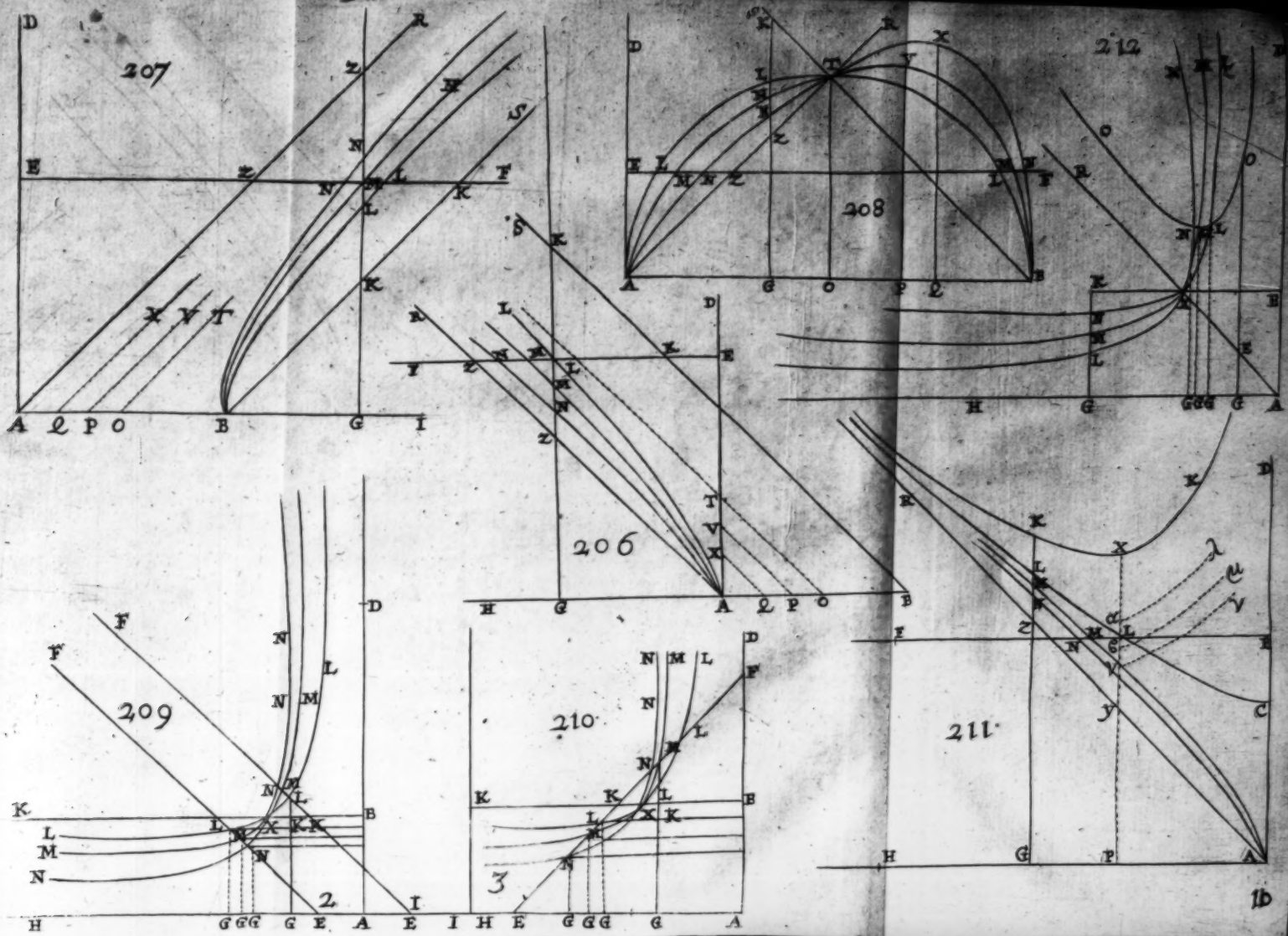
Not.

1. Curvæ CLH, AMH, ANH ad quintam seriem pertinent; reliquæ HLλ, HMμ, HNν ad sextam.

2. Quoad curvas ad quintam seriem pertinentes; si $A\varphi = \sqrt{\frac{ACq}{2}}$; & ordinetur φY; erit Y communis linearum intersectio, seu *nodus*.

3. In harum primo gradu ordinata AK est infinita, in secundo AC est maxima; in tertio si fuerit $AP = \sqrt{\frac{ACq}{3}}$, & ordinetur PV, erit PV maxima (unde radicum una semper major est quam $\sqrt{\frac{ACq}{3}}$ altera minor) in quarto si $AQ = \sqrt{\frac{ACq}{4}} = \frac{AC}{2}$, & ordinetur QX, erit QX maxima (unde radicum una major erit, altera minor ipsâ $\frac{AC}{2}$).

4. Con-


207
208
212
206
209
210
211
2
3
1b

TRINITY COLLEGE
LIBRARY.
CAMBRIDGE

4. Consequenter in harum secundo gradu si $n \sqsubset \frac{cc}{3}$, in tertio si $n^3 \sqsubset \frac{2c^3}{27}$ vel $n^3 \sqsupset \frac{2c^3}{27}$, in quarto si $n^4 \sqsubset \frac{c^4}{4} - \frac{c^4}{16} = \frac{3}{16}c^4$; nulla radix habetur; unam in iis casibus recta EF curvas supergreditur; nec iis occurrit.

5. Itidem in his omnibus maxima possibilis radix est AH = AG.

6. Curva CYH est *Circuli quadrans*, reliquæ AMH, ANH quodammodo κυκλοειδεῖς.

7. Ad sextam seriem pertinentium curva HLL est *hyperbola æquilatera*, cujus axis AH; reliquæ sunt *Hyperboliformes*. Unde quoad hanc seriem liquent cætera.

Series septima.

$$a + b + \frac{cc}{a} = n.$$
$$aa + ba + cc = nn.$$
$$a^3 + baa + cca = n^3.$$
$$a^4 + ba^3 + cca\,a = n^4, \&c.$$

In recta BAH indefinitè protensâ capiatur AB = b; & in AD ad BH perpendiculari sit AC = c; sint etiam anguli HAR, HBS Semirecti; tum arbitrariè ductâ GY ad AH perpendiculari quæ ipsam BS secet in Y; fiat AG . AC :: AC . YK; & per K intra angulum DVS describatur *hyperbola* KKK; sint denum curvæ CLL, AMM, ANN tales, ut inter AG (vel GZ) & GK sit *media* GL, *bimedia* GM, *trimedia* GN; hæ satisfacient negotio. Nam est GK = $a + b + \frac{cc}{a}$; & GL q = $aa + ba + cc$; & GM cub = $a^3 + baa + cca$; & GN q q = $a^4 + ba^3 + cc\,aa$. Fig. 214.

Not.

1. Secundi gradûs curva CLL est pars *hyperbola æquilatera*, cujus *centrum* O, ipsam AB bisecans; & liquidem AC ⊏ AO, est OH (ad AB perpendicularis, &) = $\sqrt{AC\,q - AO\,q}$ ejus *semiaxis*; sin AC ⊐ AO, ejus axis est OI = $\sqrt{AO\,q - AC\,q}$. reliquæ verò curvæ AMM, ANN sunt *hyperboliformes*.

2. Hinc

2. Hinc constat in secundo gradu si fuerit $n = C$, nullam veram radicem dari; alioquin in omnibus una semper habetur, & unica; quoniam recta E F curvas semel intersecabit, nec pluries.

Series octava.

Fig. 215.

$$\frac{cc}{a} + b - a = n.$$
$$cc + ba - aa = nn.$$
$$cca + baa - a^3 = n^3.$$
$$ccaa + ba^3 - a^4 = n^4, \&c.$$

Series nona.

$$a - b - \frac{cc}{a} = n.$$
$$aa - ba - cc = nn.$$
$$a^3 - baa - cca = n^3.$$
$$a^4 - ba^3 - ccaa = n^4, \&c.$$

Fig. 215. In recta A I sumatur A B $= b$; & in A D ad ipsam A I perpendiculari sit A C $= c$; fiant autem anguli I A R, A B S semirecti; ducatúrque recta Z G K ad A I utcunque perpendicularis, ipsam B S secans ad ξ; & sit A G . A C :: A C . ξ K; tum per K intra angulum D S B describatur *hyperbola* KYHK; sint denuo curvæ CLHLλ, AMHMμ, ANHNν tales, ut inter A G, G K sint *media* G L, *bimedia* G M, *trimedia* G N; hæ curvæ proposito satisfacient; constat autem hoc ut in præcedente.

Not.

1. Curvæ C L H, A M H, A N H ad octavam seriem pertinent, reliquæ verò H Lλ, H Mμ, H Nν, ad nonam.

2. Quoad octavam seriem, si bisecetur A B in O, & ordinetur O T ad curvam C L H est O T maxima; sin fiat A P $= \frac{b}{3} + \sqrt{\frac{bb}{9} +}$

cc

$\frac{cc}{3}$, ac ordinetur P V ad curvam A M H, erit P V maxima; item si A Q $= \frac{1}{3}b + \sqrt{\frac{2}{64}bb + \frac{cc}{2}}$, & ordinetur Q X ad curvam A N H erit Q X maxima.

3. Hinc, si in secundo harum gradu sit $n \sqsubset \sqrt{cc + \frac{bb}{4}}$; in tertio si (posito fore $f = \frac{b}{3} + \sqrt{\frac{bb}{9} + \frac{cc}{3}}$) sit $n^3 \sqsubset ccf + bff - f^3$; in quarto, si (posito fore $g = \frac{1}{8}b + \sqrt{\frac{2}{64}bb + \frac{cc}{2}}$) sit $n^4 \sqsubset ccgg + bg^3 - g^4$; nulla datur radix; nam his suppositis, recta E F curvis non occurret, respective.

4. Si fuerit A $\phi = \frac{b}{4} + \sqrt{\frac{bb}{16} + \frac{cc}{2}}$, & ordinetur ϕ Y; erit Y *Nodus* curvarum, unde si $n =$ A ϕ, erit A ϕ una radicum in omnibus.

5. Curva C L H est *circumferentia Circuli*, cujus *Centrum* O, reliquæ A M H, A N H sunt *Cycliformes*.

6. Peculiare est in secundo gradu, quòd si $n \sqsupset c$, detur una tantùm radix.

7. In hac radicum maxima (quæ & minima est in nona serie) est A H $= \frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} + cc}$.

8. Curva H L λ est *hyperbola æquilatera*, cujus *semiaxis* O H; reliquæ H M μ, H N ν sunt *hyperboliformes*; unde patet in serie nona semper unam, & hanc unicam radicem haberi.

Series decima.

Fig. 216.

$a + b - \frac{cc}{a} = n.$

$aa + ba - cc = nn.$

$a^3 + baa - cca = n^3.$

$a^4 + ba^3 - ccaa = n^4$, &c.

Series

Series undecima.

$$\frac{cc}{a} - b - a = n.$$
$$cc - ba - aa = nn.$$
$$cca - baa - a^3 = n^3.$$
$$ccaa - ba^3 - a^4 = n^4, \&c.$$

Fig. 216. In recta B A H sumatur B A $= b$; & in A D ad A H perpendiculari sit A C $= c$; sintque anguli H A R, H B S semirecti; tum utcunque ductâ rectâ G K ξ ad A H perpendiculari (quæ ipsam B S secet in ξ; sit A G . A C :: A C . ξ K; & per K intra *asymptotos* V D, V S describatur *hyperbola* KYHK; sint demum curvæ CLHLλ, AMHMμ, ANHNν tales, ut inter A G (vel G Z) & G K sint *media* G L, *bimedia* G M, *trimedia* G N; hæ proposito servient, id quod constat, ut in præcedentibus.

Not.

1. Curvæ H L λ, H M μ, H N ν ad decimam seriem pertinent; reliquæ C L H, A M H, A N H ad undecimam.

2. Curva H L λ est *hyperbola æquilatera*, & curva C L H *circularis circumferentiæ* pars; utriusque commune centrum est O, ipsam AB bisecans (unde A H $= \sqrt{\frac{bb}{4} + cc} : -\frac{b}{2}$)

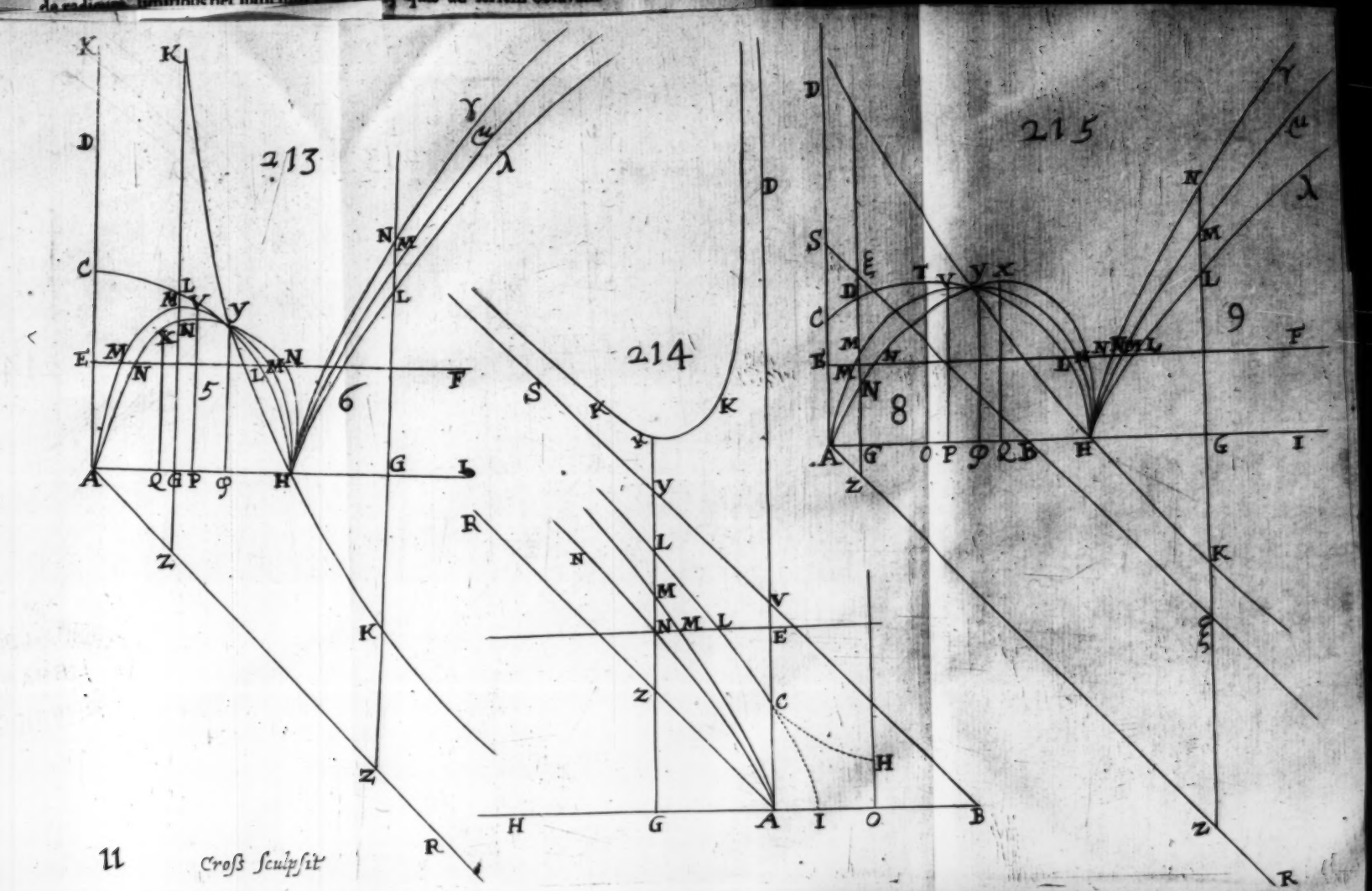
3. In decima serie radix una semper habetur, & unica; in undecima nunc duæ, nunc una, subinde nulla.

4. A $\varphi = \frac{cc}{b}$; & A $\psi = \sqrt{\frac{bb}{16} + \frac{cc}{2}} : -\frac{b}{4}$; & ordinentur φ Y, ψ X; puncta Y, X sunt nodi curvarum.

5. In undecimæ secundo gradu ordinata A C est maxima; sin A P $= \sqrt{\frac{bb}{9} + \frac{cc}{3}} : -\frac{b}{3}$; & à P ad curvam A M H ordinetur P γ, hæc maxima erit; item si A Q $= \sqrt{\frac{9bb}{64} + \frac{cc}{2}} : -\frac{3b}{8}$; & à

Q

Quad curvam A N H ordinetur Q φ, haec etiam maxima erit; unde



11 Cross sculpsit

Fig. 216.

Q ad curvam A N H ordinetur Q δ, hæc etiam maxima erit; unde de radicum limitibus fiet judicium; ut in iis, quæ ad seriem octavam sunt adnotata.

Series duodecima.

$$a - b + \frac{cc}{a} = n.$$ Fig. 217.

$$aa - ba + cc = nn.$$
$$a^3 - baa + cca = n^3.$$
$$a^4 - ba^3 + ccaa = n^4, \&c.$$

Series decima tertia.

$$b - a - \frac{cc}{a} = n.$$
$$ba - aa - cc = nn.$$
$$baa - a^3 - cca = n^3.$$
$$ba^3 - a^4 - ccaa = n^4, \&c.$$

Pro his, Sit A B $= b$; & A C $= c$; & angulus A B S semirectus, & G ξ ad A B utcunque perpendicularis, & A G . A C :: AC. ξ K; & K H K I K *hyperbolæ asymptotis* S A, S B descripta, denuò curvæ CLHLILλ, AMHMIMμ, ANHNINν tales sint; ut inter AG, G K sit *media* G L, *bimedia* G M, *trimedia* G N. Fig. 217.

Not.

1. Curvæ C L H, A M H, A N H, atque curvæ I L λ, I M μ, I N ν ad seriem duodecimam spectant, verùm intermediæ curvæ HLI, HMI, H N I ad decimam tertiam.

2. Curvæ C L H, I L λ sunt *hyperbolæ æquilateræ*, quarum commune *centrum* O (rectam A B bisecans) & *semiaxis* O H (vel O I) $= \sqrt{AOq. - ACq}$ reliquæ tales sunt, quales figura monstrat.

3. Curvæ

3. Curva HLLI est *semicirculus*; reliquis iisdem ostensis Schematis.

4. Si $A\zeta = \frac{cc}{b}$; $A\downarrow = \frac{b}{4} - \sqrt{\frac{bb}{16} - \frac{cc}{2}}$; & $A\wp = \frac{b}{4} + \sqrt{\frac{bb}{16} - \frac{cc}{2}}$; ordinentúrque rectæ ζV, $\downarrow$X, $\wp$Y; erunt puncta V, X, Y *nodi* curvarum (si $b > \sqrt{8}cc$, decrunt *nodi* X, Y; si $b = \sqrt{8}cc$; ii coalescent).

5. Ordinatarum ad curvam CLH *maxima* est ipsa AC; sin $AP = \frac{b}{3} - \sqrt{\frac{bb}{9} - \frac{cc}{3}}$, & ordinetur P$\gamma$ ad curvam AMH; erit Pγ *maxima*; item si $AQ = \frac{1}{3}b - \sqrt{\frac{2}{64}bb - \frac{cc}{2}}$; & ordinetur Q$\delta$ ad curvam ANH, erit Qδ *maxima*.

6. Ordinatarum ad curvam HLLI *maxima* est ipsa OT; sin $AP = \frac{b}{3} + \sqrt{\frac{bb}{9} - \frac{cc}{3}}$ & ad curvam HMI ordinetur pg, erit pg *maxima*; item si $Aq = \frac{1}{3}b + \sqrt{\frac{2}{64}bb - \frac{cc}{2}}$; & ordinetur qd ad curvam HNI, erit qd *maxima*.

7. Hinc radicum limites dignoscentur, ut innuitur in iis, quæ ad octavam seriem animadversa sunt.

8. Patet in Serie duodecima nunc tres, modo duas, semper unam radicem haberi; in decima tertia verò subinde duas, aliquando tantùm unam, interdum nullam haberi.

9. Et hæc quidem constant posito fore $\frac{b}{2} < c$; at si $\frac{b}{2} = c$; evanescet Series decima tertia; coalescent puncta H, O, I; recta AB *hyperbolam* KKK tanget; curvæque CLH, ILA in rectas lineas degenerabunt.

10. Sin $\frac{b}{2} > c$; etiam evanescit Series decima tertia; *hyperbola* KKK tota infra rectam AB jacente; quo casu curva CLL erit hyperbola æquilatera, habens centrum O, semiaxem (ipsi AB perpendicularem) $OT = \sqrt{ACq - AOq}$; tunc & curvæ AMM, ANN ad infinitum procurrent, sic ut æquationes, quæ in Serie duodecima, unam semper, & unicam radicem obtineant. Hæc suffecerit insinuâsse; quin & rem totam hactenus particulatim attigisse. Subnectemus autem notas quasdam magis generales.

Fig. 218.

In

In *præmissas explicationes* animadvertatur generatim.

1. Propositam quamvis æquationem explicans *curva* designatur hoc modo: proponatur, exempli causâ, *æquatio* $a^4 + ba^3 + cc\,a^2 - d^3aa - f^4a = n^4$; In recta indefinitè protensa HI designetur punctum A, pro radicum termino, vel origine; tum arbitrariè sumptâ AG pro indeterminatâ radice a; fiat GK æqualis primo seriei propositam æquationem continentis gradu; nempe sit hic $GK = a + b + \frac{cc}{a} - \frac{d^3}{aa} - \frac{f^4}{a^3}$ (utique rationem a ad c semel continuando fit $\frac{cc}{a}$; rationem a ad d bis continuando fit $\frac{d^3}{aa}$; ac ità porrò) tum inter AG, GK tot mediarum proportionalium, quot æquationis propositæ gradus exigit (is autem a pura quæsitæ radicis potestate indicatur) in hoc nempe casu quatuor mediarum proportionalium prima sit GO; per ejusmodi puncta O traducta curva AOO proposito deserviet. Fig. 219.

2. De radicibus falsis, seu negativis nihil attigimus suprà; cæterùm eæ reperiuntur hoc modo. Æquationi propositæ subrogetur altera, cujus in locis paribus (etiam vacuos locos adnumerando) signa sunt illis contraria, quæ habet æquatio proposita; erunt hujusce *subditiciæ æquationis* radices veræ, seu positivæ ipsius propositæ æquationis radices falsæ, seu negativæ. *Exemplo* sit *æquatio* $a^3 + baa = n^3$; vel $a^3 + baa^* - n^3 = 0$. Subrogetur $a^3 - baa^* + n^3 = 0$; & hujus, † utì suprà edoctum, veræ radices designentur, hæ *propositæ æquationis* falsæ erunt. Rursùs sit $a^3 - baa = n^3$, vel $a^3 - baa - n^3 = 0$; substituatur æquatio $a^3 + baa + n^3 = 0$; hæc nullam veram radicem obtinet; ergo nec *æquatio proposita* falsam admittit. † *In Serie* 3.

3. Quinimò datâ verâ radice quâpiam, depressioris gradûs æquatio quædam falsis reperiendis inserviet, qualis ita determinatur. Proponatur æquatio quævis, puta $a^3 + baa = n^3$; cujus nota sit radix una, quæ vocetur f. Constructur æquatio planè similis propositæ, eâsdemque *coefficientes* habens, tantum pro a substituendo f; nempe $f^3 + bff = n^3$. ergò $a^3 + baa = n^3 = f^3 + bff$; adeóque $a^3 + baa - f^3 - bff = 0$. dividatur hæc æquatio (id quod semper fieri potest) per $a - f$; proveniet $aa \frac{+ba + bf}{+fa + ff} = 0$; cujus æquationes eædem erunt cum reliquis æquationis propositæ radicibus; quæ proinde duas colligitur radices falsas habere; itaque mutatis locorum parium signis, ut ità fiat $aa \frac{-ba - bf}{-fa - ff} = 0$; hujus æquationis

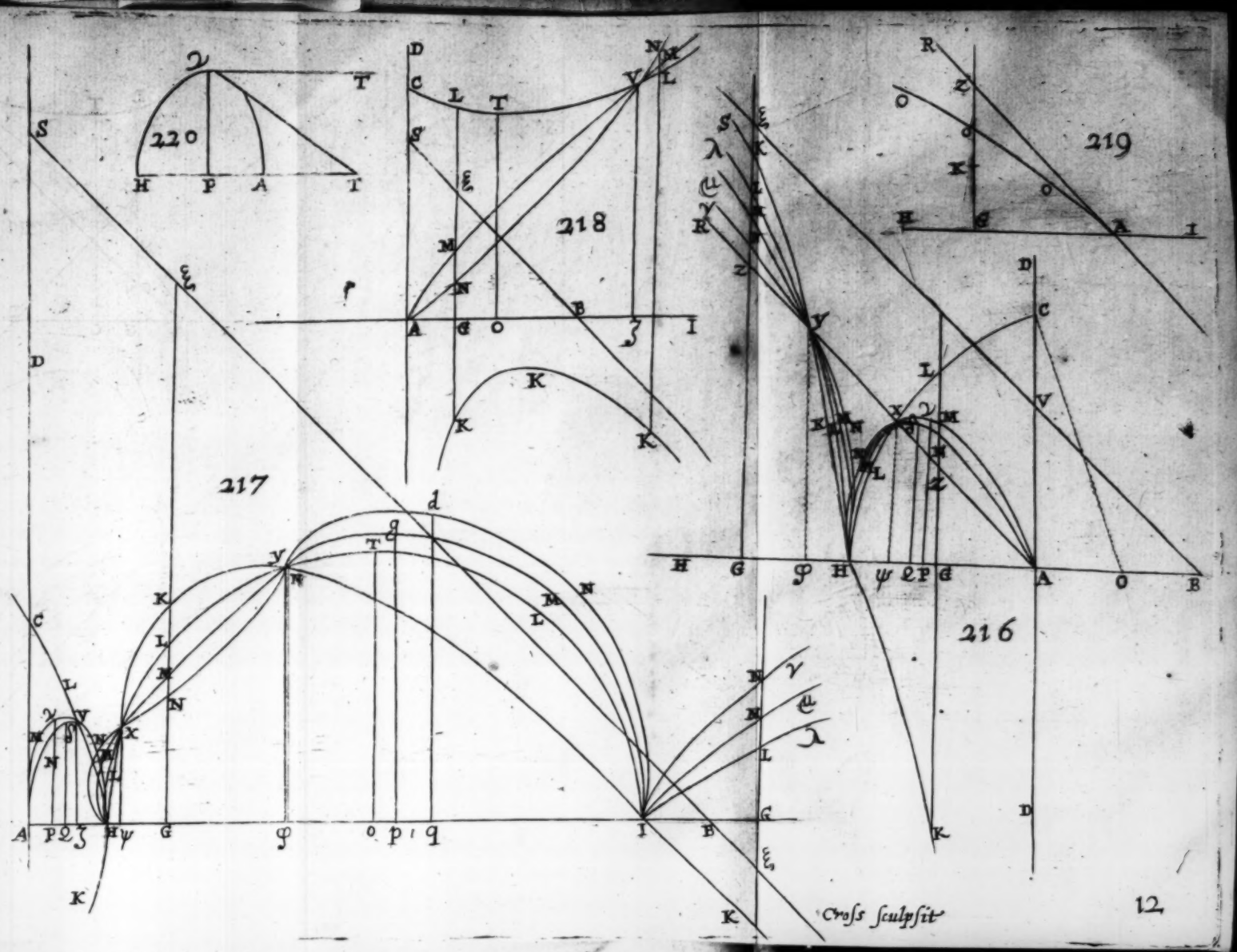
veræ radices propoſitæ falſas exhibent. Hic inſuper modus æquationis propoſitæ, quatenus illa ex aliarum in ſe ductu provenit, conſtitutionem oſtendit.

4. Radices maximæ & minimæ deprehenduntur in quacunque ſerie ponendo (quovis in gradu ſeriei) fore $n=0$; ut in octava ſerie ſit $ba-aa+cc=0$; adeóque $cc=aa-ba$, erit $a\left(=\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{bb}{4}+cc}\right)$ *maxima radix*; item in Serie duodecima ſit $aa-ba+cc=0$; unde $cc=ba-aa$; erit $a\left(=\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{bb}{4}-cc}\right)$ *radix maxima*; & $a\left(=\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{bb}{4}-cc}\right)$ *radix minima.*

5. *Curvarum nodi*, vel *interſectiones* innoteſcunt, cujuſvis in Seriei quovis gradu, ponendo fore $a=n$; ut in octava Serie, ubi $ba-aa+cc=nn$, ſit $a=n$; ergò $ba-aa+cc=aa$; vel $cc=2aa-ba$; vel $\frac{cc}{2}=aa-\frac{ba}{2}$; quare $a=\frac{b}{4}+\sqrt{\frac{bb}{16}+\frac{cc}{2}}$. Item in Serie duodecima, ubi $aa-ba+cc=nn=aa$; erit ideò $cc=ba$; ac inde $a=\frac{cc}{b}$.

6. *Ordinatæ maximæ, minimæque* variis nodis, methodiſque paſſim notis inveſtigantur; ego ſimul illas atque curvarum *tangentes* unà operâ ſic determino. Sit curva A γ H, ad Seriem undecimam pertinens, ejúſque gradum, cujus æquatio eſt $cca-baa-a^3=n^3$, poſito γ T curvam tangere, & γ P ad A H ordinari, reperio (de ſupra monſtratis) fore $PT=\frac{3n^3}{3aa+2ba-cc}$, tum conſidero, ſi ordinata P γ ſit maxima, fore tangentem ipſi H A parallelam, ſeu rectam P T eſſe infinitam; quare cùm ſit $n^3=PT\times:3aa+2ba-cc$; & n ſit finita, patet eſſe $3aa+2ba-cc=0$; vel $aa+\frac{2}{3}ba=\frac{cc}{3}$; adeóque $\surd:\frac{bb}{9}+\frac{cc}{3}:-\frac{b}{3}=a=AP$. Fig. 220.

7. Adnoto demùm è *maximis* & *minimis ordinatis* radicum limites derivari; nempe ſi reperiatur ad maximam ordinatam pertinentis radicis (velut ipſius A P in exemplo proximè ſuperiori) valor, & is ubique in æquatione pro ipſâ a ſubſtituatur, ſi quod provenit, deficiat ab *homogeneo* (quod vocant) *comparationis*, *problema* conſtrui nequit


220
218
219
217
216
Cross sculpsit
12

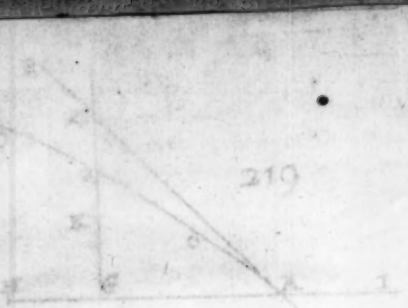


Fig. 220.

nequit, aut saltem radicibus aliquot caret, quas æquationis gradus & species præ se ferunt. Eadem *minimarum* est ratio; tantùm ibi proveniens *summa* debet *homogeneum* illud excedere, quò radix aliqua, vel omnes habeantur. *Exempla* comparent in præmissis. Hic itaque subsisto.

Laus DEO Optimo Maximo.

TRINITY COLLEGE LIBRARY CAMBRIDGE

FINIS.

ERRATA.

Pag. 5. *Lin.* 20. ad teſtatur, *lege* teſtatam facit, *p.* 9. *l.* 3. *leg.* velocitatum. *p.* 14. *l.* 36. *leg.* planâ. *p.* 17. *l.* 24. *leg.* prohibetur. *p.* 18. *l.* 32. *leg* à puncto B, *p.* 19. *l.* 4. *leg.* B D, G K. *p.* 22. 10. *leg.* VD multitudo cenſeri. *p.* 23. *l.* 7. *leg.* radius ad *p.* 23. *l.* 10. *leg.* nec non, datis. *p.* 24. *l.* 2. *leg.* effectæ. *p.* 24. *l.* 24. *leg.* quidem ut punctum. *p.* 30. *l.* 18. *leg.* protracta. *p.* 32. *l.* 5, 6. *leg.* tangentes (una — hujus) *p.* 35. *l.* 5. *leg.* tangant. *p.* 35 *l.* 6. *leg.* M P. *p.* 35. *l.* 12. *leg.* T P. *p.* 37. *l.* 2. *leg.* diviſa. *p.* 40. *l.* 4. *leg* arcus N H major eſt ipſâ. *p.* 41. *l.* 32. *leg.* verſari. *p* 43. *l.* 15. *leg.* aliam H R. *p.* 47. *l.* 26. Fig. 39, & 40. *pag.* 49. *l.* 16. *leg.* $2fx$. *p.* 52. *l.* 3. *dele* Fig. 51, 52. *p.* 52. *l.* 6. *leg.* Fig. 51, 52. *pag.* 52 *l.* 24. *leg.* Fig. 53. *p.* 55. *l.* 15. *dele* le interſecantes in X. *p.* 57. *l.* 25. *leg.* ſ P. *p.* 58. *l.* 19. *leg.* F B F ipſi K E K. *p.* 59. *l.* 2. *leg.* K E K. *p.* 61. *l.* 26. *leg.* punctum. *p.* 62 *l.* 27. *leg.* K O ⊏ K A. *p.* 63. *l.* 16. *leg.* contactum. *p.* 64. *l.* 22. *leg.* Fig. 80. *p.* 65. *l.* 4. *leg.* συνολειαν. *p.* 67. *l.* 11. *leg* tum alia. *p.* 67. *l.* 35. *leg.* $QO\,q = Z\,q$. *p.* 68. *l.* 7. *leg.* F Q. *p.* 70. *l.* 22. *leg.* Fig. 95. *p.* 76. *l.* 3. *leg.* H T (*a*) ⊏ G A. *p.* 76. *l.* 11. *leg.* D F. *p.* 76. *l.* 18. *leg.* P K. *p.* 76 *l.* 20. *leg.* tanget recta R F K. *p.* 78. *l.* 24. *leg.* infra. *p.* 79. *l.* 18. *dele* Fig. 113. *p.* 79. *l.* 31. *leg.* Fig. 113. *p.* 86. *l.* 31. *leg.* $\sqrt{VCZ\,\varphi} = CG$. *p.* 87 *l.* 14. *leg.* $D\,\downarrow^{3} = \sqrt{\frac{12}{243}}$. *pag.* 91. *l.* 9. *leg.* in recta. *p.* 91. *l.* 23. *leg.* æquale rectangulo ex. *p.* 91. *l.* 24. *leg.* P, Q. *p.* 96. *l.* 15. *leg.* C A. C D. *p.* 96. *l.* 22. *leg.* $AD = \frac{5}{2}CA$. *p.* 97. *l.* 2. *leg.* totam. *p.* 102. *l.* 25. *leg.* O P ad O T. *pag.* 106. *l.* 10. *leg.* applicatis, *p.* 106. *l.* 19. *leg.* ſemi-axis. *p.* 112. *l.* 2. *leg.* applicatis. *p.* 114. *l.* 22. *leg.* $\frac{PLQQ}{2\ \mathrm{Rad.}}$ *p.* 114. *l.* 26. *leg.* propoſitum. *p.* 116. *l.* 5. *leg.* R S. *p.* 122. *l.* 22. *leg.* Fig. 183. *p.* 123. *l.* 1. *leg.* Fig. 184 *p.* 125. *l.* 4. *leg.* D M = D I. *p.* 128. *l.* 7. *leg.* Fig. 195. *p.* 128. *l.* 11. *dele* Fig. 195. *p.* 128. *l.* 23 $\frac{PM}{\sqrt{APM}}$ *p.* 129. *l.* 13. emerget undecima Lect. *p.* 136. *l.* 20. *leg.* hyperbolæ. *pag.* 139. *l.* 3. *leg.* nam. *p.* 140. *l.* 1. *leg.* [illegible] *e.* à *p.* 105. ad *p.* 112. *l.* 1. *leg.* Lect. XII.

UBi (*pag.* 100) de Centro gravitatis parabolæ & paraboliformis verbæ fiunt, intelligantur non curvæ lineæ, ſed iis comprehenſa ſpatia, de quibus apparet iſthic agi.

Sicubi ponitur $\frac{\delta}{\sigma}$, nec adponitur διάστις ulla, deſignantur termini rationem exprimentes, quam habet circuli diameter ad ejus circumferentiam.